受験番号	

令和７年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （２枚のうち１）

（(2)(イ)は、解答及び解答に至る過程をすべて、解答用紙に記入すること。(1)と(2)(ア)は答えのみでよい。）

3	得点	

（１）

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

（２）（ア）

A＝2　、　B＝－1　、　C＝－3

（２）（イ）

$$\int_1^2 \frac{x^2-4x+13}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x-3} - \frac{x+3}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$= \int_1^2 \frac{2}{x-3}dx - \int_1^2 \frac{x+3}{x^2-2x+2}dx$$
$$= 2[\ log|x-3|\ ]_1^2 - \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+2}dx$$
$$= 2(log1 - log2) - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{dx} - \int_1^2 \frac{4}{x^2-2x+2}dx$$
$$= -2log\,2 - \frac{1}{2}[\ log|x^2-2x+2|\ ]_1^2 - 4\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$
$$= -2log\,2 - \frac{1}{2}(log2 - log1) - 4\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$
$$= -\frac{5}{2}\log 2 - 4\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

ここで

$x-1 = tan\theta$とおくと

$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \quad \to \quad 2$
θ	$0 \quad \to \quad \frac{\pi}{4}$

$$\int_1^2 \frac{x^2-4x+13}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx = -\frac{5}{2}\log 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= -\frac{5}{2}\log 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$
$$= -\frac{5}{2}log\,2 - \pi$$

受験番号	

令和７年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（２枚のうち２）

（(2)（イ）は、解答及び解答に至る過程をすべて、解答用紙に記入すること。(1)と(2)（ア）は答えのみでよい。）

4	得点	

(1)

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

（２）（ア）

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

（２）（イ）

（ア）から、関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の増減表は

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

となり、$f(x)$ の最大値は $x=e$ のとき、$\dfrac{1}{e}$ である。

よって、任意の正の数 t に対して

$\dfrac{\log t}{t}\leqq\dfrac{1}{e}$ が成り立つ。

$$\log a^{\frac{1}{3a}}b^{\frac{1}{3b}}c^{\frac{1}{3c}}=\log a^{\frac{1}{3a}}+\log b^{\frac{1}{3b}}+\log c^{\frac{1}{3c}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{1}{e}$$

ゆえに、$a^{\frac{1}{3a}}\,b^{\frac{1}{3b}}\,c^{\frac{1}{3c}}\ \leqq\ e^{\frac{1}{e}}$