

令和 8 年度

京都・大阪マス・インターセクション

大阪会場問題

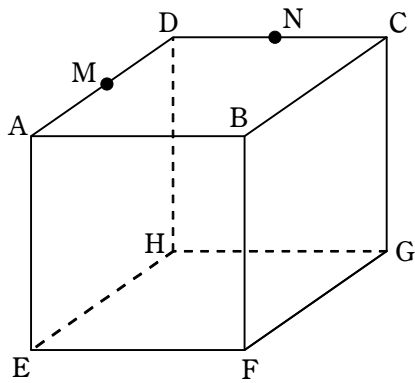
— 注 意 事 項 —

1. 問題は 1 ページから 5 ページまであります。
2. 解答用紙は、全部で 5 枚あります。
3. あなたの受験番号と名前をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は、問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお、問題番号 **1** については答えのみを、問題番号 **2** から **5** については答えのみでなく、考え方等も記入してください。（問題番号 **2** から **5** については、考え方等も採点対象となります。）
5. 計算用紙の提出は不要です。
6. 解答時間は 3 時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

1

(1) 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ について、辺 AD の中点を M 、辺 CD の中点を N とする。

この立方体を、3点 M, N, F で決まる平面で切断するとき、切断面の面積 S を求めよ。



(2) $\frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \dots + \frac{n}{n^4+n^2+1}$ を簡単にせよ。

2 面積が1の $\triangle ABC$ がある。点D, E, Fをそれぞれ辺AB, BC, CA上にとる。

AEとBFの交点をP, BFとCDの交点をQ, CDとAEの交点をRとする。P, Q, RがそれぞれBF, CD, AEを1:2に内分する。このとき, 以下の問に答えよ。

(1) $AD : DB = BE : EC = CF : FA$ となることを証明せよ。

(2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

3 n は正の整数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

問題文中にある「各位の値が等しくなる」とは、例えば「3」「33」「333」などである。

- (1) $2^n - 2026$ を 4 で割った余りを求めよ。
- (2) n を $2^n > 2026$ を満たす整数とする。 $2^n - 2026$ の各位の値が等しくなる n をすべて求めよ。
- (3) m を整数とする。 $2^n + m$ が正であり、かつ各位の値が等しくなる n を考える。
それぞれの m に対して、このような n は有限個しかないことを示せ。

4 1, 2, 3, 4, 5, 6 の6個の数字を横一列に並べる。並べた数字を左から順に見て, それまでの最大値を更新する回数がちょうど3回となる確率を求めよ。ただし, 左端の数は1回目の最大値の更新とする。

例えば, 「245361」は2, 4, 5, 6で4回最大値を更新する。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) 空間内において、直線 m と m 上にない2点 X, Y を考える。 X, Y から直線 m におろした垂線と直線 m との交点をそれぞれ X', Y' とするとき、 $XY \geq X'Y'$ が成り立つことを示せ。また、等号成立の条件は「 $X = Y$ となること」または「直線 XY が直線 m と平行となること」であることを示せ。
- (2) n を3以上の整数とする。空間内に n 本の直線 $l_1, l_2, \dots, l_n$ がある。これらのどの直線上にもない点 P_0 をとる。1以上 n 以下の任意の整数 i について、点 P_i は点 P_{i-1} から直線 l_i におろした垂線と直線 l_i との交点となるようにとるが、点 P_{i-1} が直線 l_i 上にあるときは $P_{i-1} = P_i$ とする。 P_0 をどのようにとっても直線 P_0P_n が直線 l_n に直交するとき、 n 本の直線 $l_1, l_2, \dots, l_n$ はすべて互いに平行であることを示せ。