

- 1 (1) 切断面と線分 AE との交点を P, 線分 CG との交点を Q とする。このとき切断面は五角形 MNQFP である。

次に, 直線 MN と直線 BA, BC との交点をそれぞれ X, Y とする。

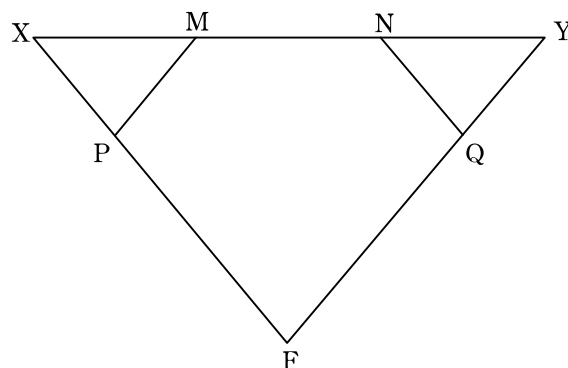
$$XA = ND = \frac{1}{2} \text{ ゆえに } BX = \frac{3}{2} \text{ である。三平方の定理より } XF = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ となり, 同様に } FY = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$XY = \sqrt{2} BX = \sqrt{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって $\triangle XFY = \frac{3\sqrt{17}}{8}$ であり,

$$\triangle XPM \equiv \triangle YQN \text{ かつ } XPM = \frac{1}{9} \triangle XFY \text{ より}$$

$$\text{求める切断面の面積 } S \text{ は } S = \frac{7}{9} \times \frac{3\sqrt{17}}{8} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$



〔別解〕 切断面を真上から見たときの投影面積 S' は $S' = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ である。

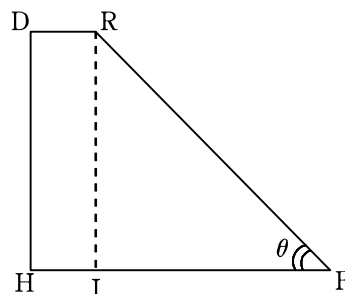
線分 MN の中点を R とすると, 切断面と底面とのなす角 θ は $\overrightarrow{FR}$ と $\overrightarrow{FH}$ とのなす角に等しい。

平面 DHF を考えると右図において $DR = \frac{\sqrt{2}}{4}$ より

$$IF = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ である。三平方の定理より } RF = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{34}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

$$S' = S \cos \theta \text{ が成立するので } S = \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{17}}{3} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$



- (2) $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ より

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) \text{ と変形できる。}$$

ここで $f(n) = \frac{1}{n^2 + n + 1}$ とおくと $f(n-1) = \frac{1}{(n-1)^2 + (n-1) + 1} = \frac{1}{n^2 - n + 1}$ となるので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4 + k^2 + 1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{f(k-1) - f(k)\} = \frac{1}{2} \{(f(0) - f(1)) + (f(1) - f(2)) + \cdots + (f(n-1) - f(n))\} \\ &= \frac{1}{2} \{f(0) - f(n)\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)} \end{aligned}$$

- 2 (1) $0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$ として, $BE : EC = s : (1-s)$,
 $CF : FA = t : (1-t)$, $AD : DB = u : (1-u)$ とする。

$$\triangle ABE \text{ と線分 } CD \text{ でメネラウスの定理より } \frac{1-u}{u} \cdot \frac{1-s}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \dots\dots ①$$

$$\triangle BCF \text{ と線分 } AE \text{ でメネラウスの定理より } \frac{1-s}{s} \cdot \frac{1-t}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \dots\dots ②$$

$$\triangle CAD \text{ と線分 } BF \text{ でメネラウスの定理より } \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1-u}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1 \dots\dots ③$$

$$①, ② \text{ より } s(1-u) = u(1-t) \quad \therefore u - s = -u(s-t)$$

$$②, ③ \text{ より } t(1-s) = s(1-u) \quad \therefore s - t = -s(t-u)$$

$$③, ① \text{ より } u(1-t) = t(1-s) \quad \therefore t - u = -t(u-s)$$

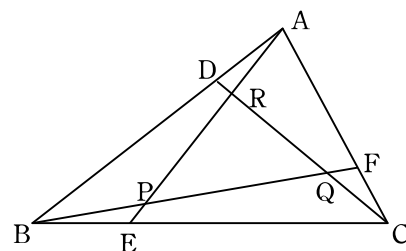
$$3 \text{ つの式をかけ合わせることで } (s-t)(t-u)(u-s) = -stu(s-t)(t-u)(u-s)$$

$$(s-t)(t-u)(u-s)(1+stu) = 0$$

$$\text{よって } s=t \text{ または } t=u \text{ または } u=s \text{ または } stu = -1$$

$0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$ より $stu = -1$ となる s , t , u は存在せず, 残りのどの場合においても

$$s=t=u=2-\sqrt{3} \text{ となる。}$$



$$(2) \triangle APB = \triangle ABC \times \frac{AF}{AC} \times \frac{BP}{BF} = 1 \times (1-t) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\sqrt{3}-1) \text{ であり, } \triangle BQC \text{ および } \triangle CRA \text{ も同様である。}$$

$$\text{したがって } \triangle PQR = 1 - 3 \times \frac{1}{3}(\sqrt{3}-1) = 2 - \sqrt{3}$$

3 (1) $n=1$ のとき, $2^n - 2026 = -2024 \equiv 0 \pmod{4}$

$n > 1$ のとき, $2^n \equiv 0 \pmod{4}$ より,

$$2^n - 2026 \equiv -2026 \equiv 2 \pmod{4}$$

以上より, $2^n - 2026$ を 4 で割ったときの余りは, $n=1$ のとき 0 であり, $n > 1$ のとき 2 である。

(2) $2^n > 2026$ より $n \geq 11$ であり, $2^n - 2026 \geq 2^{11} - 2026 = 22$ なので, $2^n - 2026$ は 2 桁以上の自然数である。

このとき, 各位の数が a ($a=1, 2, 3, \dots, 9$) となる k 桁の数 ($k \geq 2$) を, 4 で割った余りは,

$$a(1+10+10^2+\dots+10^{k-1}) \equiv 11a \pmod{4} \text{ より, } 11a \text{ を } 4 \text{ で割った余りと一致するので,}$$

$a=1, 2, 3, \dots, 9$ の各々の場合で計算すると, 余りが 2 となるのは, $a=2, 6$ のときのみである。

従って, (1) の結果から $2^n - 2026$ の各位が等しくなるような数は, 各位が 2 または 6 の場合に限られることがわかる。

ここで, $2^n - 2026$ の各位が等しくなるような数のうち, 3 桁以上の数が存在すると仮定する。

$n \geq 11$ より 2^n は $16 (=2^4)$ で割り切れるので, $2^n - 2026 \equiv -2026 \equiv -10 \equiv 6 \pmod{16}$ であることから

$2^n - 2026$ を 16 で割った余りは 6 と求められる。

一方, 各位の数が 2 または 6 である k 桁の数 ($k \geq 3$) を $16 (=2^4)$ で割ったときの余りを考えると,

$2 \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod{16}$, $6 \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod{16}$, $r \geq 4$ の自然数 r に対して $10^r \equiv 0 \pmod{16}$ であることから,

$$\begin{aligned} 2(1+10+10^2+10^3+10^4+\dots+10^{k-1}) &\equiv 2+2 \cdot 10+2 \cdot 10^2+2 \cdot 10^3+2 \cdot 10^4+\dots+2 \cdot 10^{k-1} \pmod{16} \\ &\equiv 2+4+8+0+0+\dots+0 \pmod{16} \\ &\equiv 14 \pmod{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6(1+10+10^2+10^3+10^4+\dots+10^{k-1}) &\equiv 6+6 \cdot 10+6 \cdot 10^2+6 \cdot 10^3+6 \cdot 10^4+\dots+6 \cdot 10^{k-1} \pmod{16} \\ &\equiv 6+12+8+0+0+\dots+0 \pmod{16} \\ &\equiv 10 \pmod{16} \end{aligned}$$

従って, 3 桁以上の各位の数が 2 または 6 である数は, 16 で割ると余りはそれぞれ 14, 10 となり, $2^n - 2026$ を 16 で割ったときの余り 6 と一致しない。よって, $2^n - 2026$ の各位が等しくなるような 3 桁以上の数が存在すると仮定したことが誤りで, そのような数は 2 桁と分かる。

以上より, $2^n - 2026$ で表される整数において, 各位が等しくなるような数は 22 または 66 に限られるが,

これらのうち, $2^n - 2026$ が取り得るのは, $n=11$ のときの 22 のみである。

従って, 求める n の値は $n=11$

(3) 各位の値が等しい k 桁の整数 ($k \geq 1$) は, 整数 $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ を用いて

$$a(1+10+10^2+\dots+10^{k-1}) = a \frac{10^k - 1}{9}$$

と表される。従って, 条件を満たす n があるとすると,

$$2^n + m = a \frac{10^k - 1}{9} \dots\dots ①$$

が成立する。両辺に 9 を掛けて整理すると,

$$9 \cdot 2^n + (9m + a) = a \cdot 10^k \dots\dots ②$$

となる。

ここで, a を一つ固定する。ただし, a の取り得る値は 1, 2, 3, ..., 9 の有限個である。

(I) $9m + a = 0$ のとき

m が整数であることと a の取り得る値から、 $m = -1$, $a = 9$ と定まる。

このとき、②に代入すると $9 \cdot 2^n = 9 \cdot 10^k$ であり、

$$2^n = 10^k \quad \text{となる。}$$

さらに、右辺を素因数分解して、 $2^n = 2^k \cdot 5^k$ であるが、

$k \geq 1$ において、右辺は素因数 5 をもつが、左辺は素因数 5 を持たずこれを満たす n は存在しない。

すなわち、 n の取り得る個数は、0 個

(II) $9m + a \neq 0$ のとき

整数 $9m + a$ が 2 でちょうど v 回割り切れるとする。

このとき、 $9m + a = 2^v q$ (q は奇数) と表せ、

②は、 $9 \cdot 2^n + 2^v q = a \cdot 10^k \dots\dots$ ③ と表せる。

(ア) $n \leq v$ のとき、

条件を満たす n は、 $n \leq v$ の範囲内の高々 v 個しか存在しない。

(イ) $n > v$ のとき

③の左辺は、 2^v で割り切れるが、 2^{v+1} では割り切れないので、③の左辺は、2 でちょうど v 回割り切れる。

一方、

③の右辺は、 $a \cdot 10^k = a \cdot 2^k 5^k$ であるから、 $v_2(a)$ を a が 2 で割り切れる回数とすると、

③の右辺が 2 で割り切れる回数は、 $v_2(a) + k$ となる。

従って、③の左右の 2 で割り切れる回数から、

$$v = v_2(a) + k \text{ が成り立ち、} k \leq v \text{ がいえる。}$$

よって、 $n > v$ のとき、あり得る桁数 k は $1 \leq k \leq v$ を満たす有限個に限られる。

また、 a と k が決まれば、①より

$$2^n = a \frac{10^k - 1}{9} - m$$

となり、右辺はただ一つに定まる。従って、それに対応する n は整数 m に対して高々一つである。

以上、(I)(II)より、固定した a に対して、条件を満たす n は有限個しかないといえる。

さらに、 a の取り得る値も 1, 2, 3, ..., 9 の 9 通りしかないので、条件を満たす n は

有限個しか存在しないといえる。

よって、それぞれの整数 m に対して、条件を満たす n は高々有限個であることが示された。

4 最大の数6は最後の最大値更新になる。したがって、更新がちょうど3回であることは、6より左側で、最も左の数を含みちょうど2回更新が起こることと同値である。6より左側にある数の個数を m 個とすると、この m 個の数の並び方は、 ${}_5C_m$ 通りである。相異なる m 個の数を並べる方法であって、更新がちょうど2回であるような並べ方の個数を a_m とする。このとき、6より左側の並べ方が a_m 通りで、6より右側の並べ方が $(5-m)!$ 通りであるから、更新がちょうど3回となる場合の数は、 $\sum_{m=0}^5 {}_5C_m \cdot a_m \cdot (5-m)!$ 通り。

ここで、 $a_0, a_1, \dots, a_5$ を求めると以下ようになる。

- ・ $a_0 = 0$
- ・ $a_1 = 0$
- ・ $a_2 = 1$ なぜなら、2数を①, ② ($① < ②$) とすると、並べ方は「①②」の順のみが適するからである。
- ・ $a_3 = 3$ なぜなら、3数を①, ②, ③ ($① < ② < ③$) とすると、並べ方は「①③②」「②①③」「②③①」の順が適するからである。
- ・ $a_4 = 11$ なぜなら、4数を①, ②, ③, ④ ($① < ② < ③ < ④$) とすると、並べ方は「①④〇〇」「②①④③」「②④〇〇」「③①〇〇」「③②〇〇」「③④〇〇」の順が適するからである。ただし、〇には使われていない数をどの順で入れてもよい。
- ・ $a_5 = 50$ なぜなら、更新がちょうど2回となるとき、最も左の数は5でなく、1回目の更新は最も左の数、2回目の更新は5が現れたときである。

5が左から2番目の数であるとき、5より左の数の並べ方は1通りであり、5より右の3数の並べ方は自由に決めてよいので、 ${}_4C_1 \times 1 \times 3! = 24$ 通り。

5が左から3番目の数であるとき、5より左の2数の並べ方は大きい方が左に並ぶ1通りであり、5より右の2数の並べ方は自由に決めてよいので、 ${}_4C_2 \times 1 \times 2! = 12$ 通り。

5が左から4番目の数であるとき、5より左の3数については最も大きい数が最も左に並び、残り2数の並べ方は自由に決めてよく、5より右の数の並べ方は1通りに決まるので、 ${}_4C_3 \times 2! \times 1 = 8$ 通り。

5が最も右の数であるとき、5より左の4数については最も大きい数が最も左に並び、残り3数の並べ方は自由に決めてよいので、 $3! = 6$ 通り。

したがって、 $24 + 12 + 8 + 6 = 50$ 通り。

したがって、更新がちょうど3回となる場合の数は、

$$\sum_{m=0}^5 {}_5C_m \cdot a_m \cdot (5-m)! = {}_5C_2 \cdot 1 \cdot 3! + {}_5C_3 \cdot 3 \cdot 2! + {}_5C_4 \cdot 11 \cdot 1! + {}_5C_5 \cdot 50 \cdot 0! = 225$$

全体の並べ方は、 $6! = 720$ 通りであるから、求める確率は、 $\frac{225}{720} = \frac{5}{16}$

別解

・6は必ず最大値を更新する。この確率は1である。

・5が最大値を更新するのは6より左側にある場合に起きる。この確率は $\frac{1}{2}$ である。

・4が最大値を更新するのは5, 6より左側にある場合に起きる。この確率は $\frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$ である。

・3が最大値を更新するのは4, 5, 6より左側にある場合に起きる。この確率は $\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ である。

・2が最大値を更新するのは3, 4, 5, 6より左側にある場合に起きる。この確率は $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$ である。

・1が最大値を更新するのは一番左側にある場合に起きる。この確率は $\frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$ である。

k が最大値を更新するかどうかは、 $k, k+1, \dots, 6$ の相対的な並び順のみにより決まるので、これらの事象は互いに独立である。

したがって、最大値が3回更新される確率は、

$$\begin{aligned} & \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}\right) \\ & + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}\right) \\ & + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{6}\right) \\ & + \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}\right) \\ & = \frac{1}{6!} \{(3 \times 4 \times 5) + (2 \times 4 \times 5) + (2 \times 3 \times 5) + (2 \times 3 \times 4) + (4 \times 5) + (3 \times 5) + (3 \times 4) + (2 \times 5) + (2 \times 4) + (2 \times 3)\} \\ & = \frac{1}{6!} (60 + 40 + 30 + 24 + 20 + 15 + 12 + 10 + 8 + 6) \\ & = \frac{225}{6!} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

- 5 (1) $X' = Y'$ の場合は明らかなので、そうでない場合を考える。X を通り直線 m に垂直な平面を S_X 、Y を通り直線 m に垂直な平面を S_Y とすると 2 つの平面は平行である。X から平面 S_Y におろした垂線と平面 S_Y との交点を Z とすると、直線 XZ と直線 $X'Y'$ はいずれも S_Y に垂直だから平行であり、よって 4 点 X, Z, X', Y' は同一平面上にある。一方、 S_X と S_Y は平行で一致しないため直線 XX' , ZY' は交点を持たないことから平行であるとわかる。よって四角形 $XZX'Y'$ は平行四辺形であり、 $XY \geq XZ = X'Y'$ となる。等号の成立条件は $Y = Z$ となる。
- (2) いま、点 A, B をどの n 本の直線の上にもない相異なる 2 点であって直線 AB が直線 l_n と平行であるようにとる。 $P_0 = A$ のときの P_i を A_i 、 $P_0 = B$ のときの P_i を B_i とおくと、(1) の事実より $AB \geq A_1B_1 \geq A_2B_2 \geq \cdots A_nB_n$ である。また問題文の条件より A_nB_n はそれぞれ A, B から直線 l_n におろした垂線と直線 l_n との交点である。点 A, B のとり方から $AB = A_nB_n$ であるため、上式の等号はすべて成立しなければならない。したがって直線 AB, $l_1, l_2, \dots, l_n$ はすべて平行となる。