

令和8年度

京都・大阪マス・インターセクション

京都マス・フェス2026

略解

1 2026 を連続する 2 つ以上の正の整数の和で表す方法をすべて求めよ。

解答

n から始まる連続する k 個の整数で表せるとする。

このとき、 $n, n+1, \dots, n+k-1$ の和が 2026 であるから、
等差数列の和の公式より

$$2026 = \frac{1}{2}k(2n+k-1) \text{ を得る。}$$

これより、 $k(2n+k-1) = 4052 = 2^2 \cdot 1013$

k と $2n+k-1$ の偶奇は異なり、 $2 \leq k < 2n+k-1$ であるから、 k と $2n+k-1$ の組み合わせは、
 $(k, 2n+k-1) = (4, 1013)$ の 1 通りのみ。

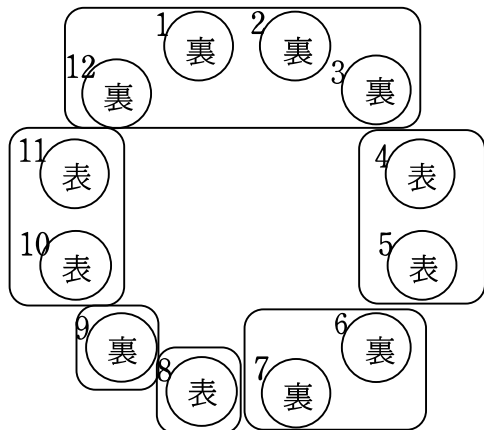
このとき、 $n = 505$

以上より、 $2026 = 505 + 506 + 507 + 508$ と表せ、これ以外に連続する 2 つ以上の正の整数で表す方法はない。

- 2 12 個の座席が円形に並んでおり、それぞれの座席に「表」または「裏」のコインを 1 枚ずつ置く。
 同じ面が連続している塊を「連」と呼び、その個数を X とする。ただし、座席は区別して考える。

- (1) $X=2$ となるような置き方は何通りあるか。
- (2) X が 3 以上の奇数となる置き方は存在しないことを示せ。
- (3) 「長さ 1 の連」が一つも存在しないような置き方は何通りあるか。

例えば、以下の図においては囲まれている塊のそれぞれが連であり、 $X=6$ である。



解答

- (1) $X=2$ となる置き方には、座席の隙間 12 個のうち、「コインの表裏が切り替わる境界」が 2 個存在する。コインの表裏の入れ替えを考慮すると ${}_{12}C_2 \times 2 = 132$ 通り
- (2) ある座席から 1 周して元の座席に戻ってくるとき、この座席に置かれたコインの表裏は変化しないため、「コインの表裏が切り替わる境界」は偶数個である。つまり $X=1$ を除いて X は偶数となり、 X が 3 以上の奇数となる置き方は存在しない。
- (3) X の値について場合分けをして考える。

$X=1$ のとき 「すべて表」か「すべて裏」の 2 通り

$X=2$ のとき 座席の隙間 12 個のうち、「コインの表裏が切り替わる境界」を隣り合わないよう選ぶ。コインの表裏の入れ替えを考慮すると

$$({}_{12}C_2 - 12) \times 2 = 108 \text{ 通り}$$

$X=4$ のとき 長さが 2 以上のとき、それぞれの連の大きさは

$$(2, 2, 2, 6), (2, 2, 3, 5), (2, 2, 4, 4), (2, 3, 3, 4), (3, 3, 3, 3)$$

1 番の座席から並べ始めることを仮定すると上の 4 つの連の大きさの組の並べ替え方が順に 4 通り、12 通り、6 通り、12 通り、1 通りである。そのそれぞれに対して表裏の入れ替えで 2 通り、並べ始める開始位置を 1 番から 12 番まで 12 通りの場合が存在する。一方で開始位置 1 番からの $(2, 2, 2, 6)$ の並べ方と開始位置 3 番からの $(2, 2, 6, 2)$ の並べ方のように重複する並べ方がそれぞれの並べ方に対して 4 通りずつあるので

$$(4 + 12 + 6 + 12 + 1) \times 2 \times 12 \div 4 = 210 \text{ 通り}$$

$X=6$ のとき 2 枚ずつの連になる。連の区切り方が 2 通り、表裏の並び方がそれぞれ 2 通りで 4 通り

$X \geq 8$ のとき 存在しない。($8 \times 2 = 16$ 個以上のコインが必要になる。)

したがって $2 + 108 + 210 + 4 = 324$ 通り。

<補足>

(3) は以下の性質を用いて解くことができる。

【性質】

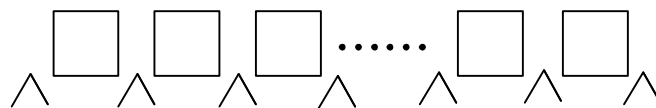
① n 個の一直線上に並んでいるものから隣接しない k 個を選択する組合せは ${}_{n-k+1}C_k$ 通り

② n 個の円形に並んだものから隣接しない k 個 $\left(k \leq \frac{n}{2}\right)$ を選択する組合せは

$${}_{n-k-1}C_{k-1} + {}_{n-k}C_k \text{ 通り } \left(\frac{n}{n-k} \cdot {}_{n-k}C_k \text{ 通り} \right)$$

【性質の証明】

① n 個の一直線上に並んでいるものから隣接しない k 個を選択する組合せは k 個の「○」と $(n-k)$ 個の「□」に対して「○」が隣り合わないように並べ替える並べ方の数と一致する。



よって、 $(n-k+1)$ 個の「△」の中から「○」の入る場所を選べば良いので ${}_{n-k+1}C_k$ 通り

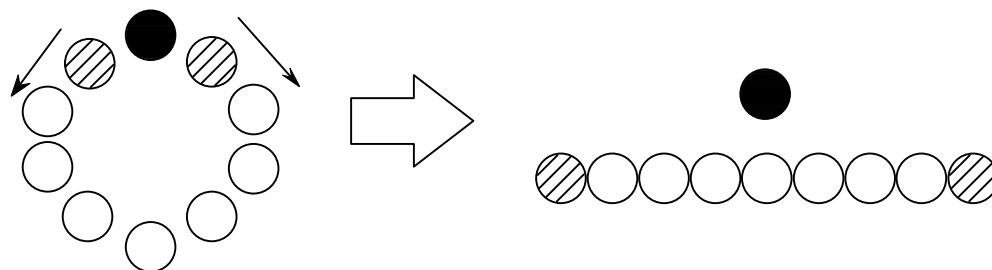
② 円形に並んでいる n 個のうち 1 個を固定する。残りの $n-1$ 個を 1 直線に並べる。

このとき、隣り合わない n 個の選び方は

(i) 固定した 1 個と直線の両端を除く $n-3$ 個から隣り合わないように $k-1$ 個を選択

(ii) 直線の $n-1$ 個から隣り合わないように k 個を選択

(i) と (ii) の場合を足すと ${}_{n-k-1}C_{k-1} + {}_{n-k}C_k$ 通り



【性質を用いた (3) の解答】

(2)より連の個数は 1 または 偶数個であるので

$n=12$, $k=2, 4, 6$ で【性質②】を使うと、

$k=2$ のとき ${}_9C_1 + {}_{10}C_2 = 54$

$k=4$ のとき ${}_7C_3 + {}_8C_4 = 105$

$k=6$ のとき ${}_5C_5 + {}_6C_6 = 2$

$X=1$ の場合と裏表の入れ替えも考慮に入れて $2 \times (1 + 54 + 105 + 2) = 324$ 通り。

- 3 $AB < AC$ となる $\triangle ABC$ の垂心を H ，線分 BC の中点を M とすると， $\triangle ABC$ の外接円上の点 T であって，四角形 $MATH$ が $MA \parallel TH$ となる等脚台形になるような点を取ることができた。直線 MA ， TH の距離が 1 のとき，線分 BC の長さを求めよ。

解答

$\triangle ABC$ の外接円を Γ とする。

補題：線分 AA' が Γ の直径をなすような点 A' をとる。このとき， M は線分 HA' の中点である。

Proof: 線分 AA' は Γ の直径であるから， $AC \perp A'C$ ， $AB \perp A'B$ が成り立つので， $BH \parallel A'C$ ， $CH \parallel A'B$ となり，四角形 $BHCA'$ は平行四辺形であるとわかる。よって，線分 BC ， HA' は線分 BC の中点 M で交わるので，補題が示される。

直線 AM と Γ の交点のうち A でない方を X ， T から直線 AM に引いた垂線と直線 AM との交点を D ，直線 TA' ， AM の交点を E とする。このとき，

$$\angle ADT = \angle MXA'，\angle TAD = \angle TAM = \angle AMH = \angle A'MX$$

より， $\triangle TAD$ と $\triangle A'MX$ は相似である。さらに，補題より， $HM = A'M$ が成り立ち， $TA = HM$ も成り立つから $TA = A'M$ となる。よって，この 2 つの三角形は合同である。

特に $AD = MX$ であり， $DE = \frac{1}{2}DX = \frac{1}{2}AM$ もわかる。

次に，

$$\angle TDE = \angle A'XE = 90^\circ，\angle TED = \angle A'EX$$

より， $\triangle TDE$ と $\triangle A'XE$ は相似である。 $TH \parallel EM$ であることから $HA = A'M$ は $TE = A'E$ を意味し，この 2 つの三角形も相似であることがわかる。

$\triangle ADT$ と $\triangle TDE$ は相似な直角三角形なので $DT^2 = AD \times DE$ が成り立つことを踏まえると，

$$DT^2 = AD \times DE = MX \times \frac{1}{2}AM$$

方べきの定理より， $MX \times AM = BM \times CM = \frac{1}{4}BC^2$ なので，

$$DT^2 = MX \times \frac{1}{2}AM = \frac{1}{8}BC^2$$

となり， $BC = 2\sqrt{2}DT = 2\sqrt{2}$ を得る。

- 4 4以上の整数 N を2つ以上の正の整数の和の形にすることを分解と呼ぶ。例えば、4は $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+3$, $2+2$ と4通りに分解できる。

N を分解したときの各項を小さい順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ とする。つまり $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k$ かつ $2 \leq k \leq N$ である。例えば、 $N=4$ において、 $1+1+2$ のとき、 $a_1=a_2=1, a_3=2$ であり、 $1+3$ のとき、 $a_1=1, a_2=3$ である。

N を分解して得られる数列で積を考える。すなわち、各数列に対して $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_k$ を考える。それらの値のうち最大となるものを $M(N)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $M(10)$ を求めよ。
- (2) $M(N)$ を求めよ。

解答

- (1) $M(10)=2 \times 2 \times 3 \times 3=36$ ($M(4)=4, M(5)=6, M(6)=9 \dots$ と調べる。)

- (2) $N=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{k-1}+a_k$ ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k$) と、 k 個に分解したとする。

このとき、 $a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k$ が最大となる条件を考える。

- (I) $a_1=1$ のとき、 $a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k < (a_1+a_2) a_3 \dots a_{k-1} a_k$ より、 $a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k$ は最大にはならない。従って、 $2 \leq a_1$ であることが必要である。

- (II) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ に5以上の奇数が含まれるとき
 $a_k=2t+1$ ($2 \leq t$) とすると、

$$t(t+1)-(2t+1)=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \geq \left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=1>0 \text{ より,}$$

$t(t+1)>2t+1$ なので、 $2t+1$ は、 t と $t+1$ に分割したほうが全体の積は大きくなる。

- (III) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ に6以上の偶数が含まれるとき
 $a_k=2t$ ($3 \leq t$) とすると、

$$t^2-2t=(t-1)^2-1 \geq (3-1)^2-1=3>0 \text{ より, } t^2>2t \text{ なので,}$$

$2t$ は、 t と t に分割したほうが全体の積は大きくなる。

以上、(II) (III) より、 $a_k \geq 5$ のときは、さらに分解した方が大きくなり、 $a_k \leq 4$ であることが必要である。

- (IV) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ に4が含まれるとき

$2 \times 2=4$ より、4は、2と2に分割しても値は変わらないので、 $a_k \leq 4$ であるならば4を分割することにより、 $a_k \leq 3$ とすることができる。

従って、 $M(N)$ に対して、 $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \leq 3$ が成り立つとしてよく、 $M(N)=2^p \cdot 3^q$ と素因数分解できることが分かる。

さらに、 $2^3 < 3^2$ が成り立つので、2を3回使うより3を2回使う方が積は大きくなる。

すなわち、積を最大にするとき、 $p \leq 2$ であり、 $2p+3q=N$ と合わせて、次のことが言える。

$N=3n$ (n は自然数) のとき,

$3n=2p+3q$ ($p \leq 2$) を解くと, $(p, q)=(0, n)$ なので, $M(N)=3^n=3^{\frac{N}{3}}$

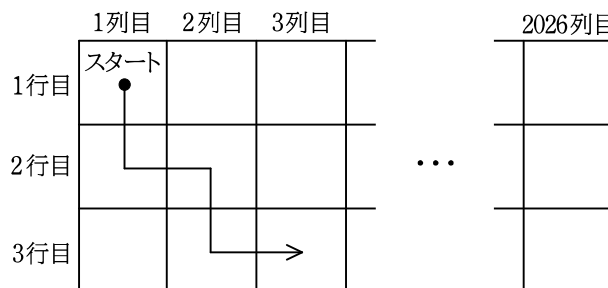
$N=3n+2$ (n は自然数) のとき,

$3n+2=2p+3q$ ($p \leq 2$) を解くと, $(p, q)=(1, n)$ なので, $M(N)=2^1 \cdot 3^n=2 \cdot 3^{\frac{N-2}{3}}$

$N=3n+1$ (n は自然数) のとき,

$3n+1=2p+3q$ ($p \leq 2$) を解くと, $(p, q)=(2, n-1)$ なので, $M(N)=2^2 \cdot 3^{n-1}=4 \cdot 3^{\frac{N-4}{3}}$

- 5 縦3行、横2026列のマスの目がある。左上のマスからスタートして、辺を共有する上下左右のマスに移動することを繰り返す。すべてのマスを一度ずつ訪れて元のマスに戻るような移動方法は何通りあるか。



解答 縦3行、横2026列とする。

補題① a を2025以下の任意の自然数とする。 a 列目と $a+1$ 列目の間の移動はちょうど2回である。

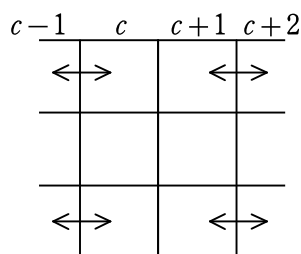
証明 a 列目と $a+1$ 列目の間の直線に注目する。移動の主体は最初、直線の左側におり、 a 列目と $a+1$ 列目の間の移動によって、またそれによってのみ左右が切り替わり、最後には直線の左側にいる。したがって a 列目と $a+1$ 列目の間の移動は偶数回である。一方で、同じマスを2回以上通ることはできず、移動は高々3回であるため、移動はちょうど2回である。

補題② b を2025以下の任意の奇数とする。 b 列目と $b+1$ 列目の間の移動は1行目と3行目でそれぞれ一度ずつ行う。

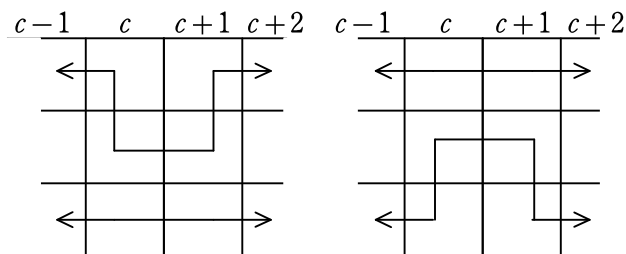
証明 マス目を市松模様に白黒で塗り分ける。移動を一回するごとに自分がいるマスの色が変わることに留意する。 b 列目と $b+1$ 列目の間の直線より右側にあるマスの合計は奇数個であるため、全てのマスを一度ずつ訪れて移動すると、右側のマスのうち最初に訪れるマスと最後に訪れるマスの白黒は同じ色となる。よって移動は1行目と3行目である。

補題③ c を2025以下の任意の偶数とする。 c 列目と $c+1$ 列目の間の移動は下図(ii)の2通りのいずれかである。

証明 補題②より下図(i)のように移動は行われる。全てのマスを一度ずつ訪れて移動するためには、起こりうる移動は下図(ii)の2通りしか存在しない。



図(i)



図(ii)

1列目上と2026列目上の移動は上下移動のみであり、列をまたぐ移動は補題①～③より図(ii)の移動方法のみである。よって各 3×2 マスの移動を考えて 2^{1012} 通り。それぞれのループについてどっち側に回るかで2通りあるため、全体で 2^{1013} 通りである。

6 球を4つの平面で切り分けることを考える。

- (1) 最大いくつに切り分けることができるか。答えだけでよい。
- (2) (1)の値を m とする。4つの平面によって切り分けられた m 個の立体の体積がすべて等しいことはありえないことを示せ。

解答

- (1) 4個の平面では球を最大15個に分割できる。これを説明する。

まず、 n 個の平面では球面を $(n^2 - n + 2)$ 個以下にしか分割できることを帰納法で証明する。

$n=1$ のとき、これは正しい。 $n=k$ で成立すると仮定して、 $n=k+1$ のときを考える。平面に $1, 2, \dots, k+1$ の番号を振る。どの相異なる2つの平面についてもその共通部分は存在すれば直線であるから、任意の1以上 k 以下の整数 i について平面 i 、平面 $k+1$ 、球面の3つの共通部分は高々2個の点である。

平面と球面の共通部分は円であるから、平面 $k+1$ と球面の共通部分は他の k 個の平面で $2k$ 個以下に分けられる。したがって平面1から平面 k までの k 個の平面によって分割された球面上の $(k^2 - k + 2)$ つの領域のうち、平面 $k+1$ によって分割されるものは $2k$ 個であるから、分割されてできる領域の数は

$$(k^2 - k + 2) + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2$$

となるため、したがう。

よって、4つの平面で球を切り分けたとき、できあがる立体のうち球面と共通部分をもつものは高々14つ。一方、球面と共通部分をもたないものがあれば、有限の大きさでありかつ境界がすべて平面であるから、これは多面体である。面の個数が高々4であるからこれは四面体であり、すべての平面を消費している。したがってそのようなものは高々1つであるから、全体では $14 + 1 = 15$ 以下である。

また、球の内部に四面体をおき、各面についてそれを含む平面をとることで球を15個に分割することができる。

- (2) 上記の議論より、4つの平面が空間を15個に分割しているとき、それらのうち1つはそれら4つの平面がなす四面体である。また残りの14つは、その四面体について面で接する4つ、辺で接する6つ、点で接する4つに分けることができる。4つの平面がなす四面体を $ABCD$ とし、各領域について A, B, C, D の4点のうちその領域（境界を含む）に含まれるものをその領域の名前とする。例えば、領域が点 A, C を含むならその領域は S_{AC} とかく。四面体は S_{ABCD} となる。また球の中心を O とする。

平面 ABC に関して四面体と同じ側には分割された領域のうち8つ（ $S_{ABCD}, S_{ABD}, S_{ACD}, S_{BCD}, S_{AD}, S_{BD}, S_{CD}, S_D$ ）が、反対側には7つ（それ以外）が残るため各平面は球を8:7に分割する。また平面 ABC, ABD によって分かれる4つの部分を考えると、2つの平面において四面体と同じ側にある領域は4つ（ $S_{ABCD}, S_{ACD}, S_{BCD}, S_{CD}$ ）、平面 ABC について同じ側かつ平面 ABD について反対側にあるものは4つ（ $S_{ABD}, S_{AD}, S_{BD}, S_D$ ）、2つの平面について反対側にあるものは3つ（ S_{AB}, S_A, S_B ）、である。したがって2つの平面を選んだときそれによって球は4:4:4:3に分割される。

それぞれの平面と O の距離がすべて等しいことを示す。平面 ABC を O を中心として回転移動させて平面 ABD と平行かつ O に関して同じ側になるようにすることを考える。こうして得られた平面 X と平面 ABD について、いずれの平面も球を 8:7 に分割している（球の対称性から O を中心とする回転移動によってこの体積比が変わることはない）ため、2 つの平面の隙間にある空間の体積は 0 でなければならない。そのため 2 つの平面の O からの距離は一致する。他の平面についても同様にみること、どの 2 つの平面も O からの距離が等しいことがわかる。

次に、どの 2 つの平面の間の角度も等しいことを示す。平面 ACD を、O を通り平面 ABC に垂直な直線を軸として回転移動することで、平面 ABC との共通部分である直線が直線 AB と平行でありかつ 2 直線の間に O から平面 ABC に引いた垂線との共有点ができないようにすることを考える。こうして得られた平面 Y と平面 ABD について、それぞれが平面 ABC となす角度が異なるとすれば、2 つの共通部分として直線 l がとれる。これは平面 ABC と平行である。平面 Y, ABD について O と反対側にある領域について、平面 ABC によって分割されてできる体積は等しくなるため、一方がもう一方に含まれることはない。各領域の境界は平面 Y または平面 ABD と平面 ABC, 球面であるから、平面 ABC のどちら側についても平面 Y と平面 ABD の共通部分がとれてしまう。よって矛盾する。他の平面の組についても同様にみること、どの 2 つの平面の間の角も等しいことがわかる。

A から平面 BCD に引いた垂線と平面 BCD との交点を H とし、H から直線 CD, DB, BC に引いた垂線と各直線との交点をそれぞれ P, Q, R とする。どの 2 つの面の角度も等しいことから $\angle APH = \angle AQH = \angle ARH$ となり、直角三角形の合同条件から $\triangle APH \equiv \triangle AQH \equiv \triangle ARH$ となる。したがって $x = \frac{PH}{AP}$ とすると、

$|\triangle ABC| + |\triangle ACD| + |\triangle ADB| = x(|\triangle HBC| + |\triangle HCD| + |\triangle HDB|) = x|\triangle BCD|$ となる。点 B, C, D についても同じ式を立て、辺々を足し合わせることで $x=3$ を得る。また四面体の各面の面積はすべて等しいことがわかる。AP = AQ = AR より各三角形の A からの高さはすべて等しいので、三角形 BCD の各辺はすべて等しくなる。したがって三角形 BCD は正三角形であり、他の面についても同様である。

今、円の中心と平面との距離を d , 球の半径を 1, $O=(0,0,0)$, $A=(0,0,3d)$ とする。

S_{ABCD} は正四面体であるため、その体積は $8\sqrt{3}d^3$ である。条件よりこの値は $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{4\pi}{45}$

に等しい。したがって

$$d = \sqrt[3]{\frac{\pi}{90\sqrt{3}}} > \sqrt[3]{\frac{1}{30\sqrt{3}}} > \frac{1}{6}$$

となるため、 $OA = 3d > \frac{1}{2}$

ここで、 S_A に含まれる点は A で対称移動すると四面体の角 A 内に入る点であり、 z 座標が 1 以下であるから A で対称移動すると z 座標が正の点に移る。したがってこの立体は四面体 ABCD を点 A で対称移動した立体に含まれるうえに一致しない。そのため S_A と S_{ABCD} の体積が等しくならず、矛盾する。