

令和6年度

京都・大阪マス・インターセクション

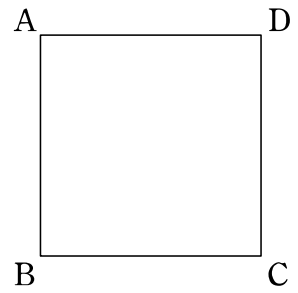
大阪会場問題

— 注意事項 —

1. 問題は1ページから5ページまであります。
2. 解答用紙は、全部で5枚あります。
3. あなたの受験番号と名前をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は、問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお、問題番号 **1** については答えのみを、問題番号 **2** から **5** については答えのみでなく、考え方等も記入してください。(問題番号 **2** から **5** については、考え方等も採点対象となります。)
5. 計算用紙の提出は不要です。
6. 解答時間は3時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

1 次の各問いに答えよ。

- (1) 1 辺の長さが 9 の正方形 ABCD の折り紙を、D が辺 AB 上に
来るように折り曲げ、このときに D が移る点を D' とする。線
分 AD' の長さが整数のとき、折り曲げた部分（辺 CD を含む
方）の面積の最小値を求めよ。（ただし、A と D が重なるとき
も線分 AD' とするものとする）



- (2) 正八面体のある頂点を始点とし、その正八面体の辺のみをたどり、始点とは別の頂点を終点とする
経路のうち、5 つまたは 6 つの頂点を通り、かつ同じ頂点を 2 度通らない経路が何通りあるか求め
よ。ただし、回転や反転で重なる経路も異なるものとみなす。

- (3) p を素数、 n を自然数とすると、 $p^n + 1$ が平方数となるような数の組 (p, n) をすべて求めよ。

- 2 4つの辺の長さが $AB = CD = 1$, $BC = DA = \sqrt{2}$ である長方形 ABCD がある。次の手順に従って、この長方形を折りたたんだとき、次の設問に答えよ。なお、計算用紙の短辺と長辺の比は $1 : \sqrt{2}$ である。

手順Ⅰ A と C が重なるように長方形 ABCD を折る。このときの折り目と辺 BC との交点を E, 辺 DA との交点を F とする。

手順Ⅱ 手順Ⅰの図形を開かないまま、頂点 B, C が重なるように紙を折る。このときの折り目と辺 AB との交点を G, 辺 BC との交点を H とする。

手順Ⅲ 手順Ⅱの図形を開かないまま、頂点 C, D が重なるように紙を折る。このときの折り目と辺 CD との交点を I, 辺 DA との交点を J とする。

- (1) 手順Ⅰ, Ⅱ, Ⅲを実行後、折りたたんだ図形を開くと線分 EF, GI, HJ は1点で交わっている。その交点を O とする。再度、手順Ⅰ, Ⅱ, Ⅲを実行すると、折りたたんだ図形として四角形 OGCI ができる。この四角形には外接円が存在することを示し、その半径を求めよ。

続いて、折りたたんだ図形を再び開く。なお、折り目はつけたままとする。

- (2) 四角形 AGOJ の面積を求めよ。

- 3 正七角柱のすべての辺から、どの2本も共有点を持たないように7本の辺を選ぶ。このような選び方が何通りあるか求めよ。ただし、回転や反転で重なる選び方も異なるものとみなす。

- 4 (1) 10桁以下の自然数で各位の数がすべて5であるもののうち、7で割り切れるものをすべて求めよ。
(2) 各位の数が4と5からなる自然数のうち、

54, 544, 554, 5444, 5544, 5554, 54444, …

のように、最高位から5が1つ以上並び、続けて4が一の位まで1つ以上並ぶような2桁以上の自然数を考える。このような10桁以下の自然数のうち、7で割り切れるものをすべて求めよ。

- 5 1 辺の長さが 2 である立方体 $ABCD-EFGH$ があり，線分 AG の中点を点 O とする。面 $ABCD$ に関して O と対称な点を O_1 とし， O_1 と 4 点 A, B, C, D を結ぶ。同様に他の 5 つの面に関して O と対称な点を O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 とし，立方体の対応する面の 4 つの頂点と結ぶ。こうしてできた 14 個の点 $A, B, C, D, E, F, G, H, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ を頂点とする多面体 P について，次の問いに答えよ。

- (1) P の表面積 S_1 を求めよ。
- (2) 中心が O であり， P に内接する球の半径 r を求めよ。
- (3) O を通り AG に垂直な平面で P を切断するとき，断面積 S_2 を求めよ。

