

令和6年度

京都・大阪マス・インターセクション

大阪会場問題

略解

1 (1) 右図のように点 E, F, G, H, I をとり, $AD' = a$ とおく。

(I) $0 < a < 9$ のとき

$\triangle ADD'$ において, 三平方の定理を用いると

$$DD' = \sqrt{9^2 + a^2} = \sqrt{81 + a^2}$$

このとき, 2点 D, D' は直線 EG に関して対称であるから,

$$D'H = HD = \frac{DD'}{2} = \frac{\sqrt{81 + a^2}}{2}$$

また, $\angle EHD = 90^\circ$ から $\triangle ADD' \sim \triangle HDE$ がわかるので,

$$ED = \frac{\sqrt{81 + a^2}}{2} \times \frac{\sqrt{81 + a^2}}{9} = \frac{81 + a^2}{18}$$

が得られ, さらに $\angle AD'D = \angle HED$ を用いると, $\triangle ADD' \equiv \triangle IGE$ がわかる。

このとき, $AD' = IE = a$ から

$$ID = GC = GF = ED - a, \quad ED' = ED, \quad FD' = CD$$

ゆえに, 台形 GFD'E の面積は

$$\begin{aligned} (GF + ED') \times FD' \times \frac{1}{2} &= (2ED - a) \times CD \times \frac{1}{2} \\ &= (2ED - a) \times \frac{9}{2} \\ &= (a^2 - 9a + 81) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(a - \frac{9}{2} \right)^2 + \frac{243}{4} \right\} \end{aligned}$$

ここで a は正の整数なので, $a = 4, 5$ のとき, 最小値 $\frac{61}{2}$ をとる。

(II) $a = 0$ のとき, 折り曲げた部分が長方形となり, その面積は

$$9 \times \frac{9}{2} = \frac{81}{2}$$

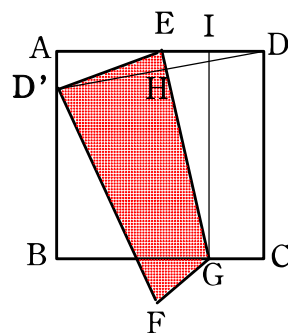
ゆえに, (I) で求めた面積 $\frac{61}{2}$ より大きい。

(III) $a = 9$ のとき, 折り曲げた部分が直角二等辺三角形となり, その面積は

$$9 \times 9 \times \frac{1}{2} = \frac{81}{2}$$

ゆえに, (I) で求めた面積 $\frac{61}{2}$ より大きい。

以上 (I), (II), (III) より, 求める面積の最小値は $\frac{61}{2}$



(2) 正八面体の各頂点は他の5つの頂点のうち4つとは接続し、残り1つとは接続していないので、接続していない点を経由するには、少なくとも2本の辺を経由する必要がある。

(I) 通る頂点の個数が5の場合

6つの頂点から5つの頂点を選び、接続していない2つの頂点が隣接しないように並べる場合の数を求めれば良い。ここで選ばなかった1つの頂点に注目し、その頂点に接続していない頂点の位置が、

両端にあるか、両端から1つずれた位置にあるか、中央にあるか

で場合分けを行うと、求める経路の本数は

$${}^6C_1 \cdot ({}^2C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 + {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 + {}^4C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^1C_1) = 288$$

である。

(II) 通る頂点の個数が6の場合

接続していない2つの頂点が隣接しないように、6つの頂点を並べる場合の数を求めれば良い。すなわち、6つの頂点を並べる場合の数から、接続していない2つの頂点が隣接する場合の数を除けば良いので、求める経路の本数は

$$6! - {}_3C_1 \cdot 2! \cdot 5! + {}_3C_1 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 4! - 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! = 240$$

である。

以上より、求める経路の本数は $288 + 240 = 528$ 本である。

(別解)

6つの頂点のうち、ある1つの頂点に注目し、その次に経路として選べる頂点を順に選んでいく。

(I) 通る頂点の個数が5の場合

$$6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 288$$

(II) 通る頂点の個数が6の場合

$$6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 240$$

である。

以上より、求める経路の本数は $288 + 240 = 528$ 本である。

(3) $p^n + 1$ が平方数のとき, ある自然数 k を用いて

$$p^n + 1 = k^2$$

と表すことができる。この式を変形すると,

$$p^n = (k - 1)(k + 1)$$

となり, p が素数であることから,

$$k - 1 = p^m, k + 1 = p^{n-m} \quad \dots \quad (\text{A})$$

を満たす 0 以上の整数 m が存在する。ここで, $p^m = k - 1 < k + 1 = p^{n-m}$ すなわち, $m < n - m$ であることに注意し, (A) の 2 つの式から k を消去すると

$$(p^m + 1) + 1 = p^{n-m} \Leftrightarrow p^m(p^{n-2m} - 1) = 2$$

となる。 $p^m > 0$, $p^{n-2m} - 1 \geq 0$ であるので, 次の場合が考えられる。

(I) $p^m = 1$, $p^{n-2m} - 1 = 2$ のとき,

$$m = 0, p = 3, n - 2m = 1 \Leftrightarrow m = 0, n = 1, p = 3$$

である。

(II) $p^m = 2$, $p^{n-2m} - 1 = 1$ のとき, 素数のうち偶数である数は 2 に限るので,

$$m = 1, p = 2, n - 2m = 1 \Leftrightarrow m = 1, n = 3, p = 2$$

である。

以上より, $p^n + 1$ が平方数となるような数の組 (p, n) は

$$\underline{(2, 3)}, \underline{(3, 1)}$$

の 2 組であることがわかる。

2 (1) 手順 I~III を実行すると以下のようになる。

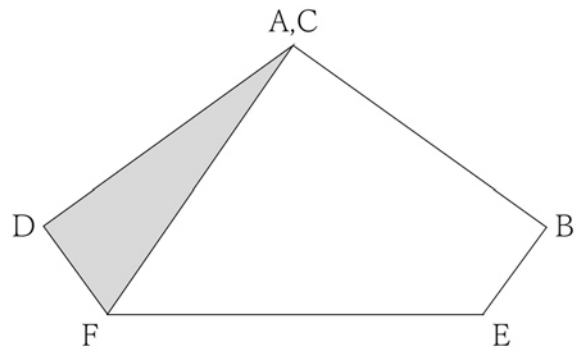


図 1: 手順 I 実行後

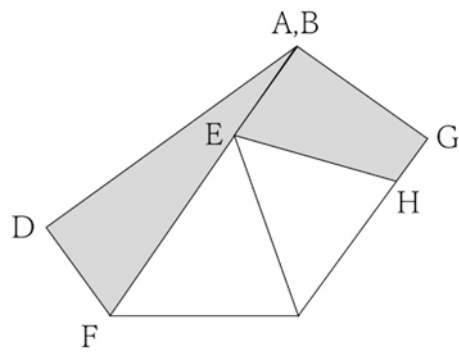


図 2: 手順 II 実行後

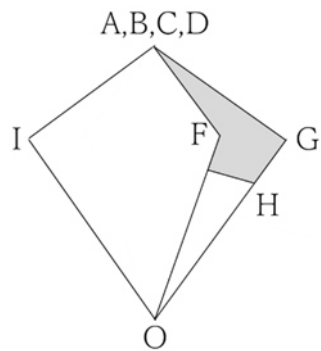


図 3: 手順 III 実行後

手順Ⅱ, Ⅲは長方形の隣接2頂点を重ねる操作であるので, その折り目はそれぞれ AB, CD の垂直二等分線となる。そのため $\angle G = \angle I = 90^\circ$ となり, 四角形の対角の和が 180° となるので, 四角形 OGCI は円に内接する。さらに円周角の定理により円の直径は線分 OC となる。ここで, 点 O が長方形 ABCD の外接円の中心であることを説明する。ABCD を手順Ⅲまで折りたたんだとき, 4点 A, B, C, D が重なるように折っているので $OA = OB = OC = OD$, すなわち点 O は A, B, C, D からの距離がすべて等しい点となり, 長方形 ABCD の外接円の中心となる。したがって

$$OI = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad CI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$$

であり, 三平方の定理から

$$OC = \sqrt{OI^2 + CI^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。以上より, 求める半径は $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) 長方形 ABCD を開くと次のようになる。

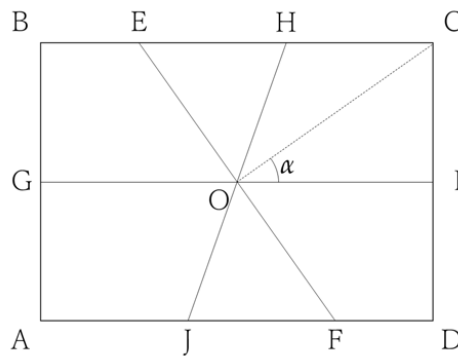


図4: 長方形 ABCD (折り目つき)

ここで手順Ⅲまで折りたたんだとき, 図3において $\triangle GOC \equiv \triangle IOC$ から $\angle COH = \angle COI = \alpha$ とおく。対頂角から $\angle COH = \angle AOJ$ であるから, $\angle AOJ = \alpha$ 。また線分 IG と線分 DA は平行であり, 平行な二直線の同位角は等しいので $\angle COI = \angle OAJ = \alpha$ である。

以上より, $\angle OAJ = \angle AOJ$ であるから, 三角形 OAJ は $AJ = OJ$ なる二等辺三角形である。よって, J から線分 OA に降ろした垂線の足 K は OA の中点となる。(1) と同様の議論により $OK = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり,

$$JK = OK \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

となる。四角形 AGOJ の面積は三角形 OAG と三角形 OAJ に分割することで求めることができるので, その値 S_{AGOJ} は

$$S_{AGOJ} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot OG + \frac{1}{2} \cdot OA \cdot JK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{32}$$

である。

3 下図のような正七角柱を考える。正七角柱の14個の頂点を2個ずつ7組に分けて、同じ組に分けられた頂点同士がいずれも、この正七角柱の辺で隣接しているような分け方の個数を考えれば良い。そこで、底面ではない辺で隣り合う頂点の組の個数で場合分けを行う。7は奇数であるから、そのような頂点の組は1, 3, 5, 7個のいずれかである。

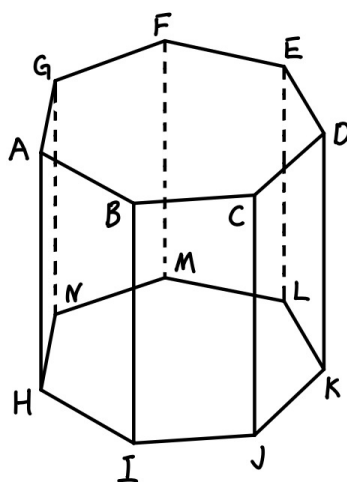
(I) 1個の場合 そのような頂点の組の選び方は7通り

(II) 3個の場合 そのような頂点の組の選び方は $7 \times 2 = 14$ 通り

(III) 5個の場合 そのような頂点の組の選び方は7通り

(IV) 7個の場合 そのような頂点の組の選び方は1通り

よって、(I) から (IV) より求める選び方は29通り。



- 4 (1) $555 = 55 \times 10 + 5$ で, $55 \equiv 6 \pmod{7}$ を用いると, $555 \equiv 6 \times 3 + 5 \equiv 2 \pmod{7}$

以下, 同様にして,

$$\begin{aligned} 5555 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 55555 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 555555 &\equiv 0 \pmod{7} \\ 5555555 &\equiv 5 \pmod{7} \\ 55555555 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 555555555 &\equiv 2 \pmod{7} \\ 5555555555 &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

よって, 求める自然数は 555555

- (2) $1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10$ を満たす自然数 i, j に対して, すべての桁が 5 である i 桁の自然数を a_i , すべての桁が 1 である j 桁の自然数を b_j とおく。 $5b_j = a_i$ を満たすとき, すなわち, $i = j$ のとき

$$15b_j \equiv b_j \equiv 3a_i \pmod{7}$$

を用いると, a_i, b_j をそれぞれ 7 で割った余りは, 次の表の通り。

i, j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i を 7 で割った余り	5	6	2	4	3	0	5	6	2	4
b_j を 7 で割った余り	1	4	6	5	2	0	1	4	6	5

以上から, 自然数 $a_i - b_j$ ($1 \leq j < i \leq 10$) のうち, 7 で割り切れる自然数を求めればよいので,

$$\underline{5544} (= a_4 - b_2), \quad \underline{5554444} (= a_7 - b_4), \quad \underline{55555444} (= a_8 - b_3)$$

$$\underline{555544444} (= a_9 - b_5), \quad \underline{555555544} (= a_{10} - b_2), \quad \underline{5544444444} (= a_{10} - b_8)$$

の 6 つである。

- (別解) n 桁の自然数 N が与えられた条件を満たすとき, 一の位から m 個 ($1 \leq m < n \leq 10$) の 4 が並ぶとすると,

$$N = 5 \times \sum_{k=1}^n 10^{k-1} - \sum_{k=1}^m 10^{k-1} = 5 \times \frac{10^n - 1}{9} - \frac{10^m - 1}{9} = \frac{5 \times 10^n - 10^m - 4}{9}$$

と表すことができる。このとき,

$$5 \times 10^n - 10^m - 4 \equiv 5 \times 3^n - 3^m - 4 \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow 5 \times 3^n - 3^m \equiv 4 \equiv -3 \pmod{7}$$

を満たす自然数 n, m を求めればよい。ある自然数 k に対して,

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^k を 7 で割った余り	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4
5×3^k を 7 で割った余り	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

が成立するので, 条件を満たす自然数 n, m ($1 \leq m < n \leq 10$) の組は,

$$(n, m) = (4, 2), (7, 4), (8, 3), (9, 5), (10, 2), (10, 8)$$

の 6 つである。(以下, 同様)。

- 5 O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 を図1のようにとるとする。このとき多面体 P は図2のような合同な12個のひし形による多面体である。(ひし形十二面体という)

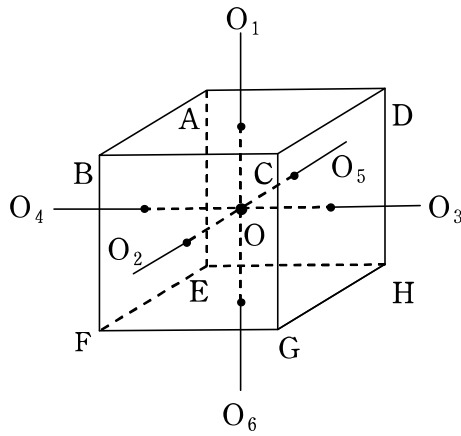


図1

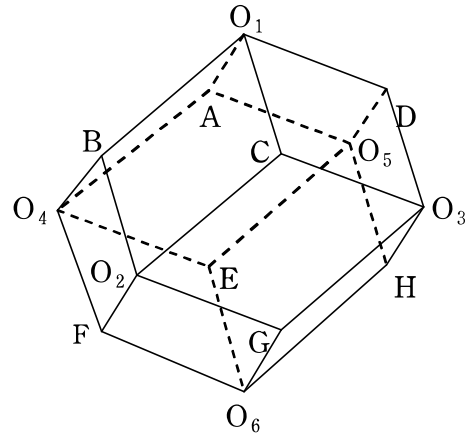


図2

- (1) ひし形の1つの対角線の長さは立方体の1辺の長さに等しいので2で、他方は立方体の面の対角線の長さ $2\sqrt{2}$ に等しいので、その面積は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ である。よって、 $S = 12 \cdot 2\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$
 (補足) 求める面積を $\triangle O_1AB$ の面積24個分と考えて計算してもよい。

- (2) 多面体 P と球の接点は各面のひし形の対角線の交点、すなわち立方体の辺の中点である。よって球の半径 r は立方体の面の対角線の長さの半分に等しいので、 $r = \sqrt{2}$

- (3) 断面を α とする。 α は線分 AG に垂直であるから、 α と辺 O_1C も垂直である。

まず α が辺 O_1C と交わることを示す。

線分 OO_1 の中点を M とする。 $\triangle OO_1C$ (図3) について、 $OO_1 = 2$, $CM = \sqrt{2}$, $O_1C = \sqrt{3}$ であり、

$$\triangle OO_1C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

O から辺 O_1C に垂線 OP を引き、 $OP = h$ とすると、 $\triangle OO_1C = \frac{1}{2}h \cdot O_1C$ より $h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (図3)

また、 $O_1P = \frac{2}{3}\sqrt{3} < O_1C$ となるので P は辺 O_1C 上の点であり、 α は O_1C と交わる。

同様にして α は線分 $BO_2, DO_3, O_4F, O_5H, EO_6$ と交わる。

さて、 α は辺 O_1C と垂直であるから、断面の図形の辺はすべて辺 O_1C ($BO_2, DO_3, O_4F, O_5H, EO_6$) と垂直である。

P の展開図を考えると、図4で点線で示したところが断面を表す。つまり、断面は図5のような正六角形になる。この面積は一辺の長さが $OP (= h)$ である正三角形の面積の6倍である。

$$\text{よって、求める面積 } S_2 \text{ は } S_2 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h^2 \right) = 4\sqrt{3}$$

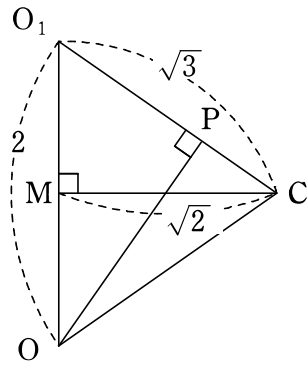


図 3

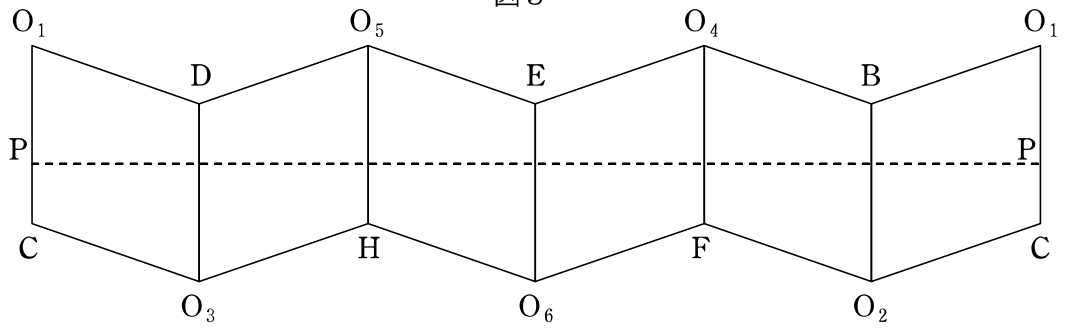


図 4

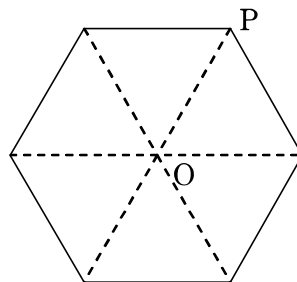


図 5

(参考) P の展開図は下の図 6 のようになる。

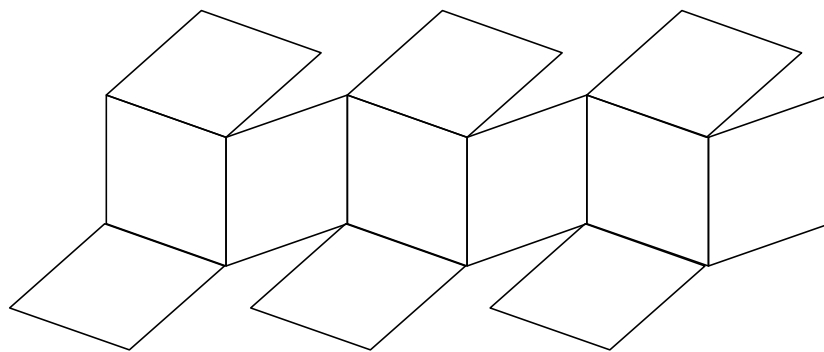


図 6