令和６年度

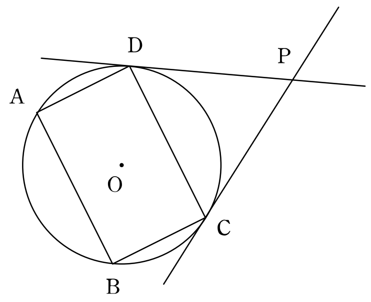
京都・大阪マス・インターセクション

（京都マス・フェス 2024　1st ステージ）

注意事項

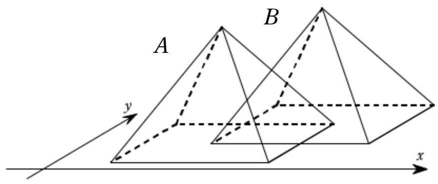
1. 問題は１ページから６ページまであります。
2. 解答用紙は必要に応じて使用してください。
3. 個人で考えた解答を募集します。１問ごとの提出とし，複数の問題に応募することが可能です。詳しい提出方法は，京都府教育委員会高校教育課のホームページをご覧ください。
4. 提出された解答の中から優秀な解答を選考し，優秀者を表彰します。また，解法のアイデアを評価する「アイデア賞」もあります。
5. 解答について
   (1) 送られてきた解答は，解説会で紹介させていただく場合があります。
   (2) 考え方と解答を７ページの解答用紙を使用し，１問につき１枚以上で記入してください。解答が２枚以上になるときや複数の問題に応募するときは，解答用紙を必要枚数印刷してください。
   (3) 必ず考え方を書いてください。特に，正解までたどり着かないものや間違えているものでも，アイデア賞の選考対象とします。
   (4) 引用・参考にしたものがあれば，その出典を明記してください。

$\boxed{1}$ $\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \dfrac{19}{45}$ である長方形 ABCD が点 O を中心とする円に内接している。点 C と点 D を接点とする円の接線を引き，その 2 直線の交点を P とする。$\mathrm{PC} = \mathrm{PD} = 1$ であるとき，円の半径を求めよ。



$\boxed{2}$ 1 辺の長さが 10 の正方形を底面とし，高さが 5 である正四角錐 A があり，その底面の各辺は座標平面の x 軸または y 軸に平行である。

正四角錐 A を x 軸方向に t，y 軸方向に $10-2t$ だけ平行移動した図形を B とする。ただし，$0 < t < 5$ とする。
A と B の共通部分の体積を V とするとき，V の最大値を求めよ。



$\boxed{3}$ 自然数 n に対し，$\sigma(n)$ で n の正の約数の総和を表すとする。

(1) $\sigma(2^8)$ を計算し，1 より大きい 2 進数の積として表せ。

(2) (1) を参考にして次を証明せよ。

p が素数，a, b が自然数で a は b の倍数であるとき，$\sigma(p^{a-1})$ は $\sigma(p^{b-1})$ の倍数である。

(3) 100 以下の自然数 n で，$\sigma(n)$ が素数となるものをすべて求めよ。

(4) $\sigma(n)$ と $\sigma(n+2^k)$ がともに素数となるような自然数の組 $(n,\ k)$ をすべて求めよ。

(5) その他，$\sigma(n)$ に関連して自由に考察せよ。

$\boxed{4}$ 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の 3 辺 AB，BC，CA を $t : 1-t\,(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ D，E，F とする。△DEF の3 辺 DE，EF，FD を $t : 1-t\,(0<t<1)$ に内分する点をそれぞれ G，H，I とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，3 点 G，H，I が動いてできる曲線が囲む部分のうち，△ABC の重心を含むものの面積を S とする。S と $\dfrac{\pi}{27}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{5}$ 20 個の駅が等間隔で並んだ環状線路において，隣接する駅と駅の間を 3 分で走行する各駅停車の電車 5 編成が等間隔で運行している。この路線のフリーパスを購入した A さんは，正午に B 駅から電車に乗る。その後，A さんは電車が駅に到着するたびに $\frac{1}{2}$ の確率で下車し，下車した場合はその駅に電車が到着するたびに $\frac{1}{2}$ の確率でその電車に乗車する。A さんがこの試行を同日の午後 3 時まで繰り返すとき，午後 3 時の時点で A さんが B 駅に滞在しているか，ちょうど B 駅に到着する確率が $\frac{1}{57}$ より大きく，$\frac{1}{50}$ より小さいことを示せ。さらに，なるべく計算の手順を少なくしてより良い評価を与えよ。ただし，電車が駅で停車する時間は無視できるものとする。

$\boxed{6}$ 同一平面上にある直線 ℓ と円 C は交点を持たないとする。ℓ を軸として C を 1 回転させてできる曲面を T とする。C 上に相異なる点 P，Q をとる。ℓ を軸として C を一定の速度で回転するとき，P，Q も C 上を一定の速度で回転する状況を考える。

C が ℓ の周りを 1 回転する間に点 P が 2 回転し，C が ℓ の周りを 2 回転する間に点 Q が点 P と逆方向に 1 回転する。円 C と点 P，Q が動き回る前の状態を「初期状態」と呼ぶことにする。円 C と点 P，Q が再び初期状態に戻るまで回転させたとき，以下の問い (1)，(2) に答えよ。

(1) T 上で点 P，Q が交わる場所はいくつあるか。

(2) 点 P，Q が描く曲線によって T を切断したとき，いくつの曲面に分割されるか。

n を自然数とする。C が ℓ の回りを 1 回転する間に点 P が n 回転し，C が ℓ の回りを n 回転する間に点 Q が点 P と逆方向に 1 回転する。円 C と点 P，Q が再び初期状態に戻るまで回転させたとき，以下の問い (3)，(4) に答えよ。

(3) T 上で点 P，Q が交わる場所の数を V_n，点 P，Q が描く曲線によって T を切断したとき分割される曲面の数を F_n とする。V_n，F_n を n で表せ。

(4) 凸多面体の頂点の数を V，面の数を F，辺の数を E としたとき，どんな多面体でも

$$V - E + F = 2$$

が成り立つことが知られている。この式は凸多面体を膨らませて球面にしたとしても結果は変わらない。同様に，(3) のように T を F_n 個の曲面に分割したとき，V_n 個の点を頂点とすると，これを「穴の空いた多面体」と考えることができる。分割した曲面の境界となる曲線をこの多面体の辺と考え，その個数を E_n としたとき，以下の式の値がどうなるか考察せよ。

$$V_n - E_n + F_n$$

令和６年度京都・大阪マス・インターセクション解答用紙

お名前		フリガナ			
学校名		学年		ペンネーム	

問題番号（　　　　）　　考え方と解答を１問につき１枚以上で記入してください。