令和 6 年度

京都・大阪マス・インターセクション

京都マス・フェス 2024

略解

$\boxed{1}$ 点 C と点 D を接点とする接線の交点を P とすると，$\mathrm{CP} = \mathrm{DP} = 1$ であり，

$\triangle\mathrm{CPD}$ は二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{PCD} = \angle\mathrm{PDC} \cdots$ ①

直線 CP と直線 AD の交点を Q とする。このとき，$\angle\mathrm{CDQ} = 90^\circ$

よって，$\angle\mathrm{PDQ} = \angle\mathrm{CDQ} - \angle\mathrm{PDC} = 90^\circ - \angle\mathrm{PDC} \cdots$ ②

点 A と点 C を結ぶ。 AC は円 O の直径となるので，$\mathrm{AC} \perp \mathrm{CQ}$ より，$\angle\mathrm{ACQ} = 90^\circ$

①より，$\angle\mathrm{PQD} = 180^\circ - \angle\mathrm{PCD} - \angle\mathrm{CDQ} = 180^\circ - \angle\mathrm{PDC} - 90^\circ = 90^\circ - \angle\mathrm{PDC} \cdots$ ③

②，③ より，$\angle\mathrm{PDQ} = \angle\mathrm{PQD}$

よって，$\mathrm{CP} = \mathrm{DP} = \mathrm{PQ} = 1$

方べきの定理から，$\mathrm{AQ} \cdot \mathrm{DQ} = \mathrm{CQ}^2$ なので，DQ=x とすると，

$\left(x + \dfrac{19}{45}\right) \cdot x = 2^2$ より，$x = \dfrac{9}{5}$

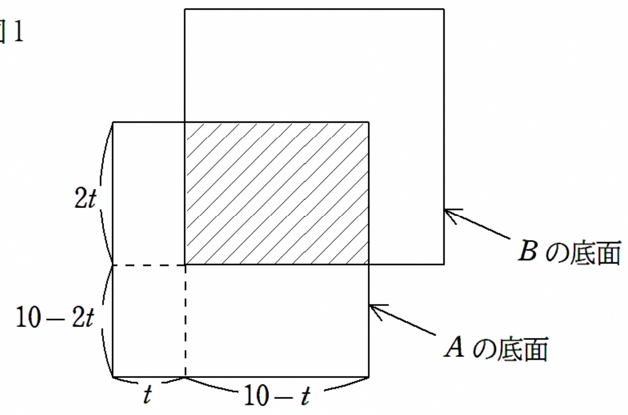
よって，$\mathrm{AQ} = \mathrm{AD} + \mathrm{DQ} = \dfrac{19}{45} + \dfrac{9}{5} = \dfrac{20}{9}$

$\triangle\mathrm{ACQ}$ において，点 O，P は AC，CQ の中点なので，中線連結定理より，$\mathrm{OP} = \dfrac{10}{9}$

$\triangle\mathrm{OCP}$ において，三平方の定理より，$\mathrm{OC} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{CP}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{10}{9}\right)^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{19}}{9}$

$\boxed{2}$

図1



正四角錐 A と正四角錐 B の底面の共通部分は図1の斜線部のようになり，x 軸方向の長さが $10-t$，y 軸方向の長さが $2t$ の長方形になる。

図2

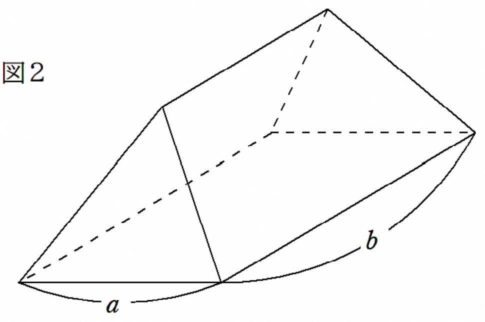
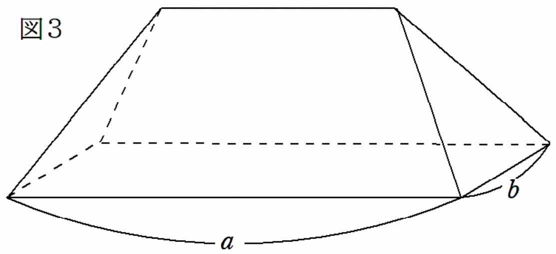
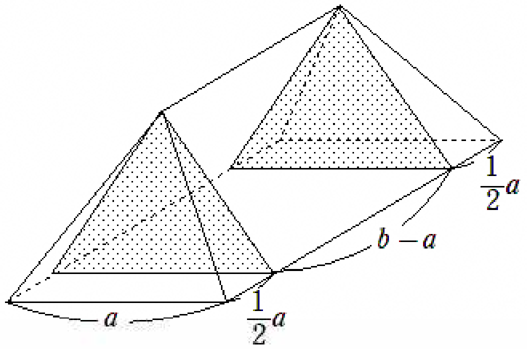


図3



$a=10-t,\ b=2t$ とする。A と B の共通部分は $a \leqq b$ のとき図2，$a \geqq b$ のとき図3のような形をしており，各面は正四角錐 A のいずれかの面に平行である。
$a \leqq b$ のとき（すなわち $\dfrac{10}{3} \leqq t < 5$ のとき），この図形の高さは $\dfrac{1}{2}a$ である。

図4



図形を図4のように四角錐2つと三角柱1つに分割することで，体積は

$$V = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{4}a^2 \times (b-a) = \frac{1}{12}(10-t)^2(7t-10) = \frac{1}{12}(7t^3-150t^2+900t-1000)$$

t で微分すると $V' = \dfrac{1}{12}(21t^2-300t+900) = \dfrac{1}{4}(7t-30)(t-10)$ であるから，増減表より V は $t=\dfrac{30}{7}$ で最大値 $\dfrac{8000}{147}$ をとる。

x	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	$\frac{30}{7}$	$\cdots$	5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{8000}{147}$	$\searrow$	

$a \geqq b$ のとき（すなわち $0 < t \leqq \dfrac{10}{3}$ のとき），同様に考えれば体積は

$$V = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}b^2 \times \frac{1}{2}b\right) + \frac{1}{4}b^2 \times (a-b) = -\frac{5}{3}t^3 + 10t^2$$

t で微分すると $V' = -5t^2 + 20t = -5t(t-4)$ であるから，増減表より V は $t = \dfrac{10}{3}$ で最大値 $\dfrac{4000}{81}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4000}{81}$

$\dfrac{8000}{147} > \dfrac{4000}{81}$ より，最大値は $\dfrac{8000}{147}$ （$t = \dfrac{30}{7}$ のとき）

（参考）　V は $0 < t < 5$ で連続であるから、$t = \dfrac{10}{3}$ のとき $V = \dfrac{4000}{81}$ であることを計算しなくても、以下の増減表から $0 < t < 5$ での最大値は $\dfrac{8000}{147}$ であると判断できる。

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	$\frac{30}{7}$	$\cdots$	5
$f'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{8000}{147}$	$\searrow$	

$\boxed{3}$ (1) $\sigma(2^8)=1+2^1+2^2+\cdots+2^8=511=111111111_{(2)}=111_{(2)}\times 1001001_{(2)}$

(2) $a=bk$ とおく (k は整数)。$\sigma(p^{a-1})=1+p+p^2+\cdots+p^{a-1}$ を p 進法で表すと

$$\begin{aligned}&\sigma(p^{a-1})\\&=\underbrace{111\cdots111}_{a\text{ 個}}{}_{(p)}\\&=\underbrace{11\cdots11}_{b\text{ 個}}{}_{(p)}\times 1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1\cdots\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1_{(p)}\\&=\sigma(p^{b-1})\times 1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1\cdots\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1\underbrace{0\cdots0}_{b-1\text{ 個}}1_{(p)}\end{aligned}$$

となるので示された (ただし 2 つめの因数の「1」の個数は k 個)。

(3) $\sigma(1)=1$ は素数でないから, 以降は $n\geqq 2$ で考える。$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_r^{e_r}$ ($e_i\geqq 1$ は整数, p_i は相異なる素数, $r\geqq 1$) と表すとき,

$$\sigma(n)=\sigma(p_1^{e_1})\cdot\cdots\cdot\sigma(p_r^{e_r})=\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_r^{e_r+1}-1}{p_r-1}$$

となる。

各 $\sigma(p_i^{e_i})$ は 2 以上の整数だから, $r\geqq 2$ だと 2 以上の整数の積で書けてしまう。よって

$$\begin{aligned}&\sigma(n)\text{ が素数}\\&\implies r=1\\&\implies n=p^e\text{と書ける }(p\text{ は素数}, e\geqq 1\text{ は整数})\end{aligned}$$

である。さらに (1) より, $e+1$ が合成数だとすると $\sigma(p^e)$ は素数ではない。よって

$$\sigma(n)\text{ が素数 }\implies n=p^{q-1}\text{と書ける }(q\text{ は素数})$$

である。 さらに $q=2$ とすると, $\sigma(p)=p+1$ が素数である p は $p=2$ のみ ($p>2$ だと $p+1$ が偶数で不適)。

上の考察より, 2 桁の整数の中で p^{q-1} と表せるものを考え, それらが条件を満たしているかを調べればよい。まず<u>$n=2$ は適する</u>から $(p,q)=(2,2)$ 以外を考える。このもとで $p^{q-1}\leqq 100$ を満たす素数 p,q $(q\geqq 3)$ の組は

$$(p,q)=(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(5,3),(7,3)$$

であり, それぞれ $n=4,16,64,9,81,25,49$ および

$$\sigma(n)=7,31,127,13,121,31,57$$

となるが, 121, 57 以外は素数である。
よって求める n は

$$\boldsymbol{n=2,4,16,64,9,25}$$

(4) (2) と同様に考え, $n=p^{q-1},n+2^k=r^{s-1}$, $a=\frac{q-1}{2},b=\frac{s-1}{2}$ とおき,

$$2^k=(r^b-p^a)(r^b+p^a)$$

という式が得られる。偶奇を見ることで, p,r の偶奇は一致することがわかる。
<u>p,r がともに奇素数のとき</u> r^b-p^a, r^b+p^a はともに 2 の正の整数乗である必要があり, どちらか一方は 4 の倍数, もう一方は 2 となる。よって 2^k は 8 の倍数になる必要があり (よって $k\geqq 3$), 大小から考えて

$$r^b-p^a=2,\quad r^b+p^a=2^{k-1}$$

なので, $r^b=2^{k-2}+1$, $p^a=2^{k-2}-1$ である。$k-2=l$ とおく。

- k が偶数の場合: 正の整数 c によって $k-2=2c$ と表せる。このとき, $p^a=2^{2c}-1$ より

  $$p^a=(2^c+1)(2^c-1)$$

  である。2^c+1 と 2^c-1 の最大公約数を g とすると, g は奇数でかつ $(2^c+1)-(2^c-1)=2$ を割り切るので $g=1$ である。p は素数なので, $2^c-1=1, 2^c+1=p^a$ となる。ここから

  $$c=1,\quad p=3,\quad a=1$$

  が得られ, $n=p^{2a}=9$, $k=2c+2=4$ は確かに $\sigma(9)=13, \sigma(9+2^4)=31$ となるので条件を満たしている。
- k が奇数の場合: まず, $k=3$ の場合は $p^a=2^{3-2}-1=1$ なので不適である。以降は $k\geqq 5$ で考える。$k-2$ が奇数だから, $r^b=2^{k-2}+1\equiv 0 \pmod 3$ である。よって $r=3$ でなければならない。$k\geqq 5$ だから $2^{k-2}\equiv 0 \pmod 4$ である。よって

  $$3^b=2^{k-2}+1 \implies (-1)^b\equiv 1 \pmod 4$$

  を得るので, b は偶数である。$b=2b_1$ (b_1 は正の整数) とおくと, $3^{2b_1}-1=2^{k-2}$ より

  $$(3^{b_1}-1)(3^{b_1}+1)=2^{k-2}$$

  である。$3^{b_1}\pm 1$ はともに 2 のべき乗とならねばならないが, これらは連続する二つの偶数であることから, どちらか一方は 4 の倍数ではない。よって $3^{b_1}-1=2$ が従い, $b_1=1$ を得る。よって $b=2$ $(q=5)$ であり, $k=5$ を得るが, $n+2^k=r^{2b}=81$ は $\sigma(81)=121$ が素数でないため不適である。

<u>$p=r=2$ のとき</u>　$n=2^{q-1}$, $n+2^k=2^{s-1}$ より,

$$2^{s-1}=2^{q-1}+2^k$$

となる。$q-1\neq k$ だと, 右辺が 2 で割り切れる回数は高々 $\min\{q-1,k\}<s-1$ なので不適。よって $q-1=k$ で, $2^{s-1}=2^{q-1}+2^{q-1}=2^q$ なので $s-1=q$ を得る。s,q はともに素数なので, 偶奇から $s=3, q=2$ となる。このとき $n=2^{q-1}=2$, $k=q-1=1$ は確かに $\sigma(2)=3, \sigma(n+2^k)=7$ で条件を満たす。
以上より, 求める (n,k) は

$$\boldsymbol{(n,k)=(2,1),(9,4)}$$

(5) 解答例

$\sigma(n)$ が素数であるような n の集合を S とおく。このとき, 以下が成り立つ.

> 1 以上 n 以下の整数で S に属すものの個数を $f(n)$ とおくとき, $\dfrac{\log\log n}{n}f(n)$ は有界である。つまり, ある定数 C が存在して, すべての n で
>
> $$\frac{\log\log n}{n}f(n)<C$$
>
> が成り立つ。

素数 p を固定するとき, $k\in S$ であるためには $k=p^{q-1}$ (q は素数) と書けることが必要であった。よって,

$$p^{q-1}\leqq n \implies q\leqq 1+\frac{\log n}{\log p}$$

なので, $r_{p,n} = 1 + \frac{\log n}{\log p}$ とおくとき, q は高々 $\pi(r_{p,n})$ 通りである ($\pi(x)$ は x 以下の素数の個数)。
よって

$$
\begin{aligned}
&f(n) \leqq \sum_{p \leqq n} \pi(r_{p,n}) \leqq \pi(n)\pi(r_{2,n}) \\
&\Longrightarrow \frac{\log n}{n}\frac{\log r_{2,n}}{r_{2,n}} f(n) \leqq \pi(n)\frac{\log n}{n}\pi(r_{2,n})\frac{\log r_{2,n}}{r_{2,n}}
\end{aligned}
$$

よって $C_1 \log n \leqq r_{2,n} \leqq C_2 \log n$ となる定数 $C_1, C_2 > 0$ があるので, 左辺を評価して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\log n}{n} \cdot \frac{\log\left(C_1 \log n\right)}{C_2 \log n} f(n) \\
&\leqq \frac{\log n}{n} \cdot \frac{\log r_{2,n}}{r_{2,n}} f(n)
\end{aligned}
$$

である。 素数定理より $\dfrac{\log\log n}{n} f(n)$ が有界であることが従う。

素数定理

$$
\lim_{x \to \infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} = 1
$$

$\boxed{4}$ DE の長さは, 余弦定理より

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\mathrm{BD}^2+\mathrm{BE}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DE}\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{(1-t)^2+t^2-t(1-t)}=\sqrt{3t^2-3t+1}$$

図形の対称性より, 同様に考えて $\mathrm{EF}=\mathrm{FD}=\sqrt{3t^2-3t+1}$. $\triangle$BDE と $\triangle$EGH は相似であり, 図形の対称性より $\mathrm{GH}=\mathrm{HI}=\mathrm{IG}=3t^2-3t+1$ である.$\triangle$ABC の重心を O とし, 点 O を軸として図形全体を時計回り, または反時計回りに 120 度回転させると元の図形と重なる. よって $\triangle$GHI の重心も動かないので $\triangle$ABC の重心 O と一致する.

$$\mathrm{OG}=\mathrm{OH}=\mathrm{OI}=\frac{1}{\sqrt{3}}(3t^2-3t+1)$$

図形の対称性より, 点 G が描く曲線は点 B から辺 AC に下ろした垂直二等分線に対して線対称であり, 点 H, I が描く曲線に関してもそれぞれ点 C, A から辺 AB, BC に下ろした垂直二等分線に対して線対称であるから, この 3 つの曲線のいずれか 2 つの交点は少なくとも $\triangle$ABC のいずれかの頂点から下ろした垂直二等分線上にそれぞれ一つ以上存在する. 点 G, H, I がこれらの直線上を通るのは $t=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ のときのみである. このとき OG=OH=OI=$\frac{1}{3\sqrt{3}}$ であり, $\triangle$GHI に外接する半径 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ の円 Γ を考えると, Γ の面積は

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\pi=\frac{\pi}{27}$$

また, OG, OH, OI の長さを $f(t)$ と表すと

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}(3t^2-3t+1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

より, $f(t)$ を縦軸, t を横軸としてプロットした二次関数は下に凸であり, $t=\frac{1}{2}$ で最小値をとる. よって $0\leqq t\leqq\frac{1}{3},\frac{2}{3}\leqq t\leqq 1$ のとき $f(t)\geqq\frac{1}{3\sqrt{3}}$ より点 G, H, I は円 Γ の外部, $\frac{1}{3}\leqq t\leqq\frac{2}{3}$ のとき $f(t)\leqq\frac{1}{3\sqrt{3}}$ より点 G, H, I は円 Γ の内部にある. $t=\frac{1}{3}$ のときの点 G, H, I と $t=\frac{2}{3}$ のときの点 I, G, H はそれぞれ重なる. また, 点 O から辺 AB, BC, CA に垂線を下ろし, それぞれの交点を点 J, K, L とすると点 G, H, I は $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$ のときそれぞれ四角形 BJOK, CKOL, ALOJ の内部にあるので, 点 G,H,I が動いてできる曲線が囲む領域のうち点 O を内部に含むものは円 Γ の中に含まれる. 以上より $\boldsymbol{S<\frac{\pi}{27}}$ である.

$\boxed{5}$ 以下，電車から降りることと，降りた後に新たに到着した電車に乗らないことを「電車を逃す」と呼ぶ。A さんがちょうど k 回だけ電車を逃すとき，180 分間のうちの $12k$ 分間を電車に乗らず過ごすことになる。よって，A さんが回る駅の数は $60-4k$ 個である。従って，A さんがちょうど k 回だけ電車を逃す確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{60-4k}{}_{60-4k}\mathrm{H}_k=\frac{{}_{59-3k}\mathrm{C}_k}{2^{60-3k}}$$

である。ここで，A さんが午後 3 時の時点で B 駅にいるのは $k=0,5,10$ の場合であり，これらは互いに排反な事象だから，求める確率は $\dfrac{1}{2^{60}}+\dfrac{{}_{44}\mathrm{C}_5}{2^{45}}+\dfrac{{}_{29}\mathrm{C}_{10}}{2^{30}}$ である。これが $\dfrac{1}{57}$ より大きく，$\dfrac{1}{50}$ より小さいことを示す。まず，これが $\dfrac{1}{57}$ より大きいことは，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{60}}+\frac{{}_{44}\mathrm{C}_5}{2^{45}}+\frac{{}_{29}\mathrm{C}_{10}}{2^{30}}>\frac{{}_{29}\mathrm{C}_{10}}{2^{30}}&=\frac{(3\cdot 11)\cdot(5\cdot 13)\cdot(7\cdot 23\cdot 29)}{2^{29}}\\&>\frac{2^5\cdot 2^6\cdot(2^9\cdot 3^2)}{2^{29}}=\frac{9}{512}>\frac{1}{57}\end{aligned}$$

より従う。次に，これが $\dfrac{1}{50}$ より小さいことは，第 1 項と第 2 項について，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{60}}+\frac{{}_{44}\mathrm{C}_5}{2^{45}}<\frac{{}_{44}\mathrm{C}_5}{2^{44}}&=\frac{7\cdot 11\cdot 25\cdot 41\cdot 43}{2^{29}}\cdot\frac{1}{2^{11}\cdot 50}\\&<\frac{2^3\cdot 2^4\cdot 2^5\cdot 2^6\cdot 2^6}{2^{29}}\cdot\frac{1}{2^{11}\cdot 50}<\frac{47}{2^{11}\cdot 50}\end{aligned}$$

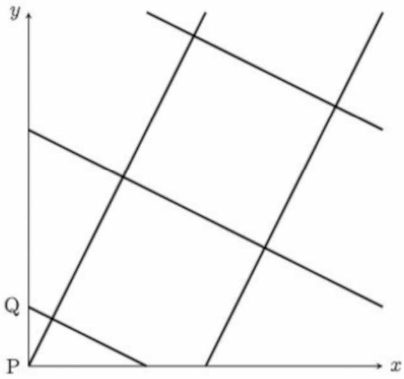
であり，一方，第 3 項について，

$$\begin{aligned}\frac{{}_{29}\mathrm{C}_{10}}{2^{30}}&=\frac{29!}{2^{30}\cdot 10!\cdot 19!}=\frac{5^3\cdot(7\cdot 11\cdot 13)\cdot(3\cdot 23\cdot 29)}{2^{28}}\cdot\frac{1}{50}\\&<\frac{2^7\cdot 2^{10}\cdot 2001}{2^{28}}\cdot\frac{1}{50}=\frac{2001}{2^{11}}\cdot\frac{1}{50}\end{aligned}$$

であることより，これら 2 つの不等式の最左辺と最右辺を足し合わせれば従う。

$\boxed{6}$ (1)

C が初期状態から直線 l の周りを x 度, 点 P, Q が C 上の点のうち直線 l から最も離れた点を基準として, C の中心に対して点 P が動く方向を正として y 度進んだ位置にあるとする. C が l の周りを 2 回転して再び初期状態に戻るまでのグラフを $0^\circ \leqq x, y < 360^\circ$ の範囲で描くと以下のようになる. なお, 円 C, 点 P,Q は全て一定の速度で動くのでグラフ上での軌跡はどちらも直線となる.



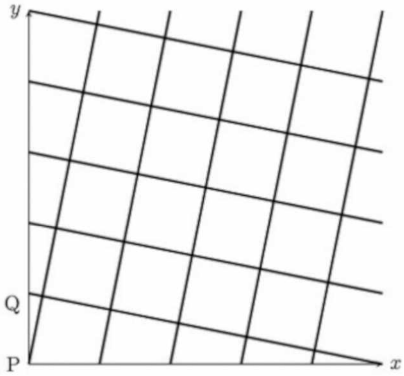
このグラフの座標 (x, y) は T 上の点と一対一対応しているので, このグラフの交点が求める値である. したがって **5 個**.

(2)

このグラフは縦軸, 横軸いずれも周期性がある. したがってグラフの対辺はそれぞれ繋がっていると考えられ, それぞれの対辺を同じ向きで貼り合わせると正方形は **5 つ**, つまり交点の数と同じ数だけ面がある.

(3)

(1) と同様に考えてグラフを描くと (以下のグラフは $n = 5$ の場合)



なお, グラフ全体を少しずらして点 P,Q の軌跡がどちらも $(x, y) = (0, 0)$ を通るように, すなわち 2 点が重なるところを基準として描いたものである. グラフの境界の交点が 1 つ, 内部が $n \times n$ 個あるので, このグラフ全体の交点は $n \times n + 1 = n^2 + 1$ 個ある. (2) と同様に考えると面の数は交点の数に等しい. 以上より $V_n = F_n = \boldsymbol{n^2 + 1}$

(4)

分割された一つ一つの曲面はいずれも 4 つの頂点を持ち, 4 つの曲線を境界に持つ. F_n 個の面の境界を全て数えると, $4F_n$ 個だが, 全ての境界を重複して 2 回ずつ数えていることになるので

$$E_n = \frac{4F_n}{2} = 2F_n = 2(n^2 + 1)$$

以上より, 全ての n に対して $\boldsymbol{V_n - E_n + F_n = 0}$ が成り立つ. なお, どのように曲面を分割しても穴が一つ空いた多面体ならこの値は 0 になる. これは「オイラー標数」と呼ばれており, より一般に穴が g 個ある多面体ではこの値は $2 - 2g$ となる.