$\boxed{1}$

　すべてを点灯させることはできない。背理法で示す。ボタン A，B，C，D，E を押した回数をそれぞれ a，b，c，d，e とする（ a，b，c，d，e は本質的に 0 か 1 でよい）。ボタン A につながれたボタンは B，C，D であるので，ボタン A の状態は b + c + d が偶数なら消灯，奇数なら点灯していると判定できる。同様の考察をすればすべてのボタンが点灯しているためには

$$\mathrm{b} + \mathrm{d} + \mathrm{e} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$
$$\mathrm{a} + \mathrm{c} + \mathrm{d} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$
$$\mathrm{b} + \mathrm{d} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$
$$\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} \quad \cdots\cdots \quad (4)$$
$$\mathrm{a} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

のすべてが奇数であることが必要十分であることがわかる。よってもしすべてのボタンを点灯した状態にできるなら，(1) ～ (5) のすべてが奇数となる a，b，c，d，e が存在する。このとき (5) より a ＝ 1。(2)，(4) に代入して c + d，b + c が偶数となるから b + d が偶数でなければならない。これは (3) に矛盾する。

$\boxed{2}$

点 P は，底面からの高さが 2 cmである平面上を動く。図 1 のように点 A′ と点 M をとると，線分 A′B の長さは 3 cmであり，A′B は円柱の底面を自由に動くことができる。求める面積は点 M が底面上を動く領域の面積に等しい。

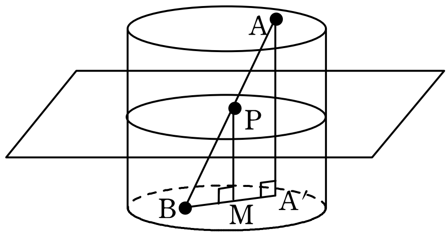


図 1

底面の中心を O とする。OM が最大となるのは，図 2 のように点 A′，B がいずれも円周上にあるときである。

このとき　$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OA'}^2-\mathrm{A'M}^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

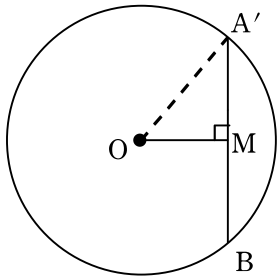


図 2

また，図 3 のように A′B を動かせば

OM は 0 から $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ までの任意の長さをとれる。

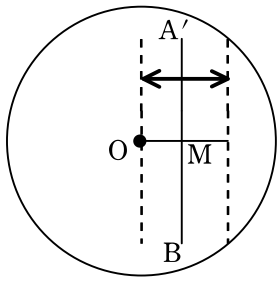


図 3

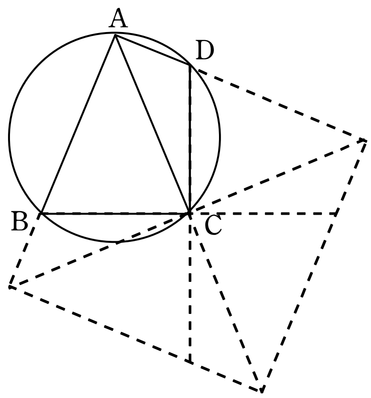
M が $0\leqq \mathrm{OM}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ という条件を満たしながら動くとき，

M の動く領域は O を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ の円の周と内部となる。

したがって面積は $\dfrac{7}{4}\pi$

$\boxed{3}$

四角形 ABCD に合同な四角形を 4 つ組み合わせて次のような正方形を得る。



この正方形の一辺の長さが $\mathrm{AB}+\mathrm{AD}$ であり，

$(\mathrm{AB}+\mathrm{AD}):\mathrm{AB}=(\mathrm{AB}+\mathrm{AD}):\mathrm{AC}=\sqrt{2}:1$ となる。

$\mathrm{AB}=1$ なので，$(1+\mathrm{AD}):1=\sqrt{2}:1$

よって $\mathrm{AD}=\sqrt{2}-1$

$\boxed{4}$

$$y^2+y+1 \leqq 2023 \quad \Leftrightarrow \quad y(y+1) \leqq 2022$$

よって

$$1 \leqq y \leqq 44$$

である。また

$$x=\frac{-y \pm \sqrt{-3y^2+8092}}{2}$$

である。ここで，x は自然数なので， $-3y^2+8092$ は平方数でなければならない。

$-3y^2+8092$ は 17 を法として

$$-3y^2+8092 \equiv 14y^2$$

である。平方数を 17 で割った余り全体の集合は

$$\{0, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$$

であることが確かめられるので， $14y^2$ を 17 で割った余り全体の集合は

$$\{0, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$$

であることがわかる。

$$\{0, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\} \cap \{0, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\} = \{0\}$$

であり，14 と 17 が互いに素であることから， $-3y^2+8092$ が平方数であるためには， y が 17 の倍数であることが必要である。$1 \leqq y \leqq 44$ より

$$y=17, 34$$

である。x が自然数となるのは

$$(x, y)=(34, 17), (17, 34)$$

のみである。

$\boxed{5}$

移動 A，移動 B，移動 C，移動 D がそれぞれ a, b, c, d 回であるとすると，a, b, c, d は以下の方程式を満たす。

$$\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ 3a+2b+c=9 \\ b+2c+3d=9 \end{cases}$$

$a \geqq 4$ のとき $3a+2b+c \geqq 12$ となり矛盾するので $a=0, 1, 2, 3$ である。

$a=0$ のとき　$(b, c)=(2, 5), (3, 3), (4, 1)$

$a=1$ のとき　$(b, c)=(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)$

$a=2$ のとき　$(b, c)=(0, 3), (1, 1)$

$a=3$ のとき　$(b, c)=(0, 0)$

ここで $(a, b, c)=(0, 2, 5), (1, 0, 6)$ は $a+b+c+d>6$ となり不適である。よって

$$(a, b, c, d)=(0, 3, 3, 0), (0, 4, 1, 1), (1, 1, 4, 0), (1, 2, 2, 1), (1, 3, 0, 2), (2, 0, 3, 1), (2, 1, 1, 2), (3, 0, 0, 3)$$

であるので，求める総数は

$$\frac{6!}{0!3!3!0!}+\frac{6!}{0!4!1!1!}+\frac{6!}{1!1!4!0!}+\frac{6!}{1!2!2!1!}+\frac{6!}{1!3!0!2!}+\frac{6!}{2!0!3!1!}+\frac{6!}{2!1!1!2!}+\frac{6!}{3!0!0!3!}=580$$