$\boxed{1}$

読み上げられた計算式に番号を与える。

2①35②7142③8④2⑤86⑥⑦3⑧1⑨1⑩8⑪5＝

点⑥，⑦が連続している箇所について

・いずれかが小数点の場合，もう一点の意味が通らないので，不適。よって⑥，⑦はそれぞれ循環節を表す上付き点または掛け算記号のいずれかである。

・⑥が掛け算記号の場合，掛け算記号の直後に点が読み上げられることは無いので不適。

・⑥が循環節の終わりを表す上付き点のとき，直後に循環節の終端に相当する数が存在しないので不適。

・⑦が循環節の始まりを表す上付き点のとき，直前に循環節の始端に相当する数が存在しないので不適。

以上より，2点⑥，⑦の解釈のしかたは「⑥，⑦が循環節の始端と終端を表している場合」と「⑥が1桁の循環節の上付き点，⑦が掛け算を表している場合」に限られる。

【1】⑥，⑦が循環節の始端と終端を表している場合

この循環節の直前にある5番目の「・」は小数点である。またこの小数の前後の4番目，8番目の「・」は掛け算でないと意味が通らない。よってこの時点で計算式は

2①35②7142③8 $\times 2.8\dot{6}\dot{3}\times$ 1⑨1⑩8⑪5＝

すなわち　　2①35②7142③8 $\times\dfrac{63}{22}\times$ 1⑨1⑩8⑪5＝

と解釈できる。以降，他の数字列の解釈を考える。

[1]　2①35②7142③8について

Ⅰ）点①が「小数点」であった場合

ⅰ．②が循環節の始まりを表す上付き点であるとする。2.35②が循環節の長さ1の数であると解釈すると，その直後に整数が読み上げられているので意味が通らない。そこで②が長さ2以上の循環節の始まりを表しているとすると③は循環節の終わりを表していると解釈することができ，この数字列は$2.3\dot{5}7142\dot{8}\,(=33/14)$となる。

ⅱ．②が循環節の始まりを表す上付き点でないならば，その直前に循環節の始端を表す点が無いため循環節の終端を表している可能性は除外される。また，この点の直前の点①が小数点であるため，②は小数点でない。よって②は掛け算の記号であり，③も小数点または掛け算記号に限られる。したがって，この数字列の解釈は

2.35×7142.8，　$2.35\times7142\times8$のいずれかとなる。

Ⅱ）点①が「小数点」でなかった場合

点①より前に小数点，循環節の始端を表す点がないので①の意味は掛け算記号に限られる。

ⅰ．②が小数点ならば③は循環節の始端を表している可能性があるが，その直後に掛け算記号を挟まず整数が読み上げられているので不適。また，③の直前に循環節の始端を表す点が存在しないので，③が循環節の終端を表していると解釈することはできない。さらに，③の直前に小数点が存在するので③は小数点ではない。以上より③は掛け算の記号に限られるので$2\times35.7142\times8$となる。

ⅱ．②が小数点でないならば，②の直前に小数点が存在しないので②は循環節の始まり，終わりのいずれにも該当しない。よって②は掛け算の記号と解釈される。このとき③は小数点か掛け算記号に限られ，この数字列の解釈は$2\times35\times7142.8$，$2\times35\times7142\times8$のいずれかとなる。

[2]　1⑨1⑩8⑪5について

Ⅰ）点⑨が「小数点」であった場合

ⅰ．⑩が循環節の始まりを表す上付き点であるとする。[1]のⅠ－ⅰと同様の議論により1.1⑩が循環節の長さ１の数と解釈される可能性は除外できるので，⑪が循環節の終わりを表していると考えられる。ゆえにこのとき，この数字列は$1.\dot{1}8\dot{5}$（＝32 / 27）と解釈できる。

ⅱ．⑩が循環節の始まりを表す上付き点でないならば，[1]のⅠ－ⅱと同様の議論により⑩は掛け算の記号であることが分かり，⑪も小数点か掛け算記号に限られる。よってこの数字列の解釈は1.1×8.5，1.1×8×5のいずれかとなる。

Ⅱ）点⑨が「小数点」でなかった場合，[1]のⅡと同様の理由で点⑨は掛け算の記号である。

ⅰ．⑩が小数点ならば[1]のⅡ－ⅰと同様に⑪は掛け算の記号に限られるのでこの数字列は１×1.8×５となる。

ⅱ．⑩が小数点でないならば，[1]のⅡ－ⅱと同様には掛け算の記号であり，⑪も小数点か掛け算記号に限られる。ゆえにこの数字列の解釈は１×１×8.5，１×１×８×５のいずれかとなる。

以上より，各数字列の解釈はそれぞれ6通りあるため，この計算式の解釈は36通りある。すべての解釈を表１にまとめる。表中に○で示した部分は答えが有限小数となるような解釈であり，全部で16通りある。

表１　⑥，⑦が循環節の始端と終端を表している場合の2･35･7142･8と1･1･8･5の解釈

		1･1･8･5					
		32 / 27	1.1×8.5	1.1×8×5	1×1.8×5	1×1×8.5	1×1×8×5
2･35･7142･8	33 / 14	○	○	○	○	○	○
	2.35×7142.8		○	○			
	2.35×7142×8		○	○			
	2×35.7142×8		○	○			
	2×35×7142.8		○	○			
	2×35×7142×8		○	○			

【2】⑥が１桁の循環節の上付き点，⑦が掛け算を表している場合

この循環節の直前にある５番目の「･」は小数点である。またこの小数の直前の４番目の「･」は掛け算でないと意味が通らない。よってこの時点で計算式は

2①35②7142③8 ×$2.8\dot{6}$×3⑧1⑨1⑩8⑪5＝

すなわち　　2①35②7142③8×$\frac{43}{15}$×3⑧1⑨1⑩8⑪5＝

と解釈できる。以降，他の数字列の解釈を考える。

[1]　2①35②7142③8について

この数字列の解釈は【1】[1]で整理したものと同様。

[2]　3⑧1⑨1⑩8⑪5について

Ⅰ）点⑧が「小数点」であった場合

ⅰ．⑨が循環節の始まりを表す上付き点であるとする。【1】[1]のⅠ－ⅰと同様に点⑨の直後の⑩は循環節の終わりを表しているので，数字列3⑧1⑨1⑩8は$3.\dot{1}1\dot{8}$（＝3115/999）となる。さらにその直後の点⑪は，$3.\dot{1}1\dot{8}$の直後に配置されているので掛け算の記号である。したがって，この数字列の解釈は$3.\dot{1}1\dot{8}$×５のみである。

ⅱ．⑨が循環節の始まりを表す上付き点でないならば，先述と同様の議論により⑨は掛け算の記号である。このとき，⑩の直前に小数点が無いので⑩は循環節の始端，終端のどちらにもなりえない。また，⑪の直後に掛け算の

記号が無く，なおかつ⑪以前に循環節の始端が存在しないので，⑪も⑩と同様，循環節の始端，終端のいずれにも相当しない。したがって，⑩，⑪の意味は小数点か掛け算記号に限られる（ただし，両者が同時に小数点になる場合を除く）。以上より，このときの解釈は3.1×1.8×5，3.1×1×8.5，3.1×1×8×5の3通りとなる。

ここで点⑧が「小数点」であった場合について整理する。この場合の解釈は次の表2の通りで，そのうち計算結果が有限小数となるのは○印で示した5通りである。

表2　⑥が1桁の循環節の上付き点，⑦が掛け算，⑧が小数点を表している場合の2・35・7142・8と3・1・1・8・5の解釈

		3・1・1・8・5			
		3115 / 999 × 5	3.1 × 1.8 × 5	3.1 × 1 × 8.5	3.1 × 1 × 8 × 5
2・35・7142・8	33 / 14				
	2.35 × 7142.8		○		
	2.35 × 7142 × 8		○		
	2 × 35.7142 × 8		○		
	2 × 35 × 7142.8		○		
	2 × 35 × 7142 × 8		○		

Ⅱ）点⑧が「小数点」でなかった場合，先述と同様の議論により点⑧は掛け算の記号である。

このとき，この全体の計算式は

$$2①35②7142③8\times\frac{43}{15}\times3\times1⑨1⑩8⑪5=$$

すなわち

$$2①35②7142③8\times\frac{43}{5}\times1⑨1⑩8⑪5=$$

となるが，数字列1⑨1⑩8⑪5の解釈は【1】の[2]で議論した通りである。よって点⑧が「小数点」でなかった場合の2①35②7142③8，1⑨1⑩8⑪5の解釈のしかたの組み合わせのうち，計算結果が有限小数となるのは表3で○印をつけた25通り。

表3　⑥が1桁の循環節の上付き点，⑦，⑧が掛け算を表している場合の2・35・7142・8と1・1・8・5の解釈

		1・1・8・5					
		32 / 27	1.1×8.5	1.1×8×5	1×1.8×5	1×1×8.5	1×1×8×5
2・35・7142・8	33 / 14						
	2.35 × 7142.8		○	○	○	○	○
	2.35 × 7142 × 8		○	○	○	○	○
	2 × 35.7142 × 8		○	○	○	○	○
	2 × 35 × 7142.8		○	○	○	○	○
	2 × 35 × 7142 × 8		○	○	○	○	○

以上より，読み上げられた計算式のすべての解釈のうち，結果が有限小数となるのは16 + 5 + 25 = 46通り。

$\boxed{2}$

切断する溝の位置や順序が異なっても，切断後にできたかけら全体の組合せが同じ切断方法は区別しないので，かけらの形状が正方形でないことに注意すると，縦方向の切断の幅と横方向の切断の幅がそれぞれ左から右，上から下に単調増加するように切断すれば，かけら全体の組合せと切断方法が 1 対 1 に対応する。実際，切断後にできたかけらの縦の長さと横の長さの組を辞書式に並び替えて，その順番通りにかけらを左上から敷き詰めることによってのみ，規則を満たした上で元の大きな長方形をした板チョコの形状に復元することができる。このとき，縦方向の切断に対しては，和が 8 になる自然数を小さいものから順に並べた組を考えれば縦方向の切断の幅に対応させることができ，横方向の切断に対しても，和が5 になる自然数を小さいものから順に並べた組によって同様に対応させることができる。さて，和が 8 になる自然数の組は，(1,1,1,1,1,1,1,1)，(1,1,1,1,1,1,2)，(1,1,1,1,1,3)，(1,1,1,1,2,2)，(1,1,1,1,4)，(1,1,1,2,3)，(1,1,2,2,2)，(1,1,1,5)，(1,1,2,4)，(1,1,3,3)，(1,2,2,3)，(1,1,6)，(1,2,5)，(1,3,4)，(1,7)，(2,2,2,2)，(2,2,4)，(2,3,3)，(2,6)，(3,5)，(4,4)，(8) の 22 個であり，和が 5 になる自然数の組は，(1,1,1,1,1)，(1,1,1,2)，(1,1,3)，(1,2,2)，(1,4)，(2,3)，(5) の 7 個である。ここで，和が 8 になる各組に対して，$a_1=$ (4 の個数)，$a_2=$ (1 の個数)，$a_3=$ (2 の個数)，和が 5 になる各組に対して，$b_1=$ (1 の個数)，$b_2=$ (4 の個数)，$b_3=$ (2 の個数) と定めると，和が 8 になる組と和が 5 になる組を上から一つずつ選べば，それらの組に対応する切断方法に対しては $\sum_{k=1}^{3} a_k b_k$ が重さが 12 g のかけらの個数となる。ここで，切断の規則により少なくとも 1 回は切断するので (8) と (5) を同時に選ぶことはできないことに注意すると，$\sum_{k=1}^{3} a_k b_k$ が n となるような組の選び方の総数はそれぞれ，$n=0$ のとき 87，$n=1$ のとき 17，$n=2$ のとき 20，$n=3$ のとき 8，$n=4$ のとき 7，$n=5$ のとき 8，$n=6$ のとき 3，$n=7$ のとき 0，$n=8$ のとき 2，$n=9$ のとき 0，$n=10$ のとき 1 である。この総数がとりも直さず $f(n)$ の値である。

3

(1)　四面体 A－BCD を頂点 A につながる辺 AB，辺AC，辺 AD で切って開いた展開図 ABA′CA″D を考えるとき，三角形 ABD，三角形 A′BC，三角形 A″CD はいずれも元の四面体の面であるので展開図の角 A，A′，A″ はいずれも 180 度未満となる。したがって，展開図 ABA′CA″D が三角形となるとき，180 度となるのは角 B, C, D となる。AB と A′B は元の四面体では同じ辺であったため，AB = A′B が成り立つ。同様に A′C = A″C，A″D = AD が成り立つので，中点連結定理により三角形 ABD，三角形 A′BC，三角形 A″CD，三角形 BCD はすべて合同でいずれも三角形 AA′A″ と相似であり，相似比は 1 : 2 である。したがって求める四面体は「すべての面が合同な四面体」で，四面体の面と展開図の三角形は相似比 1 : 2 となる。

(2)　前問での考察により，180 度となる可能性があるのは頂点 B，C，D のみであり，展開図が四角形となるのはそのうちの 2 つが 180 度となる場合である。対称性により，頂点 B，C が 180 度となる場合（例にあげた図のようなパターン）のみ考えればよい。この場合，展開図は四角形 AA′A″D となるが，辺 AD と辺 A″D はいずれも四面体の辺 AD なので AD = A″D。したがって求める条件の一つに「隣り合う一組の辺の長さが等しい」があることがわかる。

以下，この四角形を四角形 PQRS とし，PQ = PS とする。たとえば QR の中点を M，RS の中点を N として PR と MN の交点を T とすると，組み立てたときに立体になることから PT , TR , PQ を三辺とする三角形が存在することから PT + TR > PQ すなわち「PR > PQ」が求める条件の一つにあることがわかる（同じ三角形の条件から他にも |PT－TR| < PQ などの条件がわかる）。このように「立体になること」「これらを三辺とする三角形が存在すること」から様々な条件が見つかるはずなので試行錯誤してみてほしい。

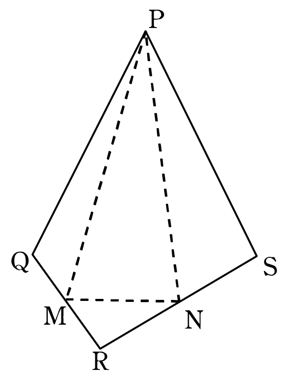


図 1 (2) の図

(3)　前問での考察により，展開図が六角形である場合は「隣り合う三組の辺の長さがそれぞれ等しい」ことが必要となる。この六角形を六角形 PQRSTU とし，PQ = QR , RS = ST , TU = UP とする。こちらもまた前問と同様に「立体になること」「これらを三辺とする三角形が存在すること」から様々な条件が見つかる。角度の条件，すなわち ∠PQU + ∠RQS > ∠UQS といったものを考えても良い。

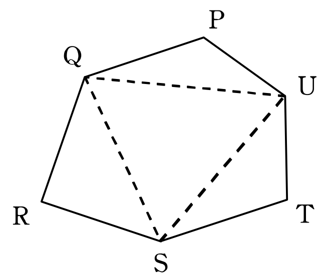
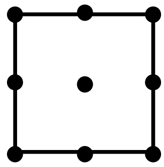


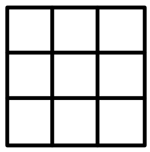
図 2 (3) の図

$\boxed{4}$

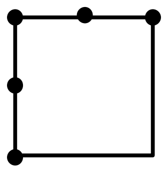
(1)　以下のように配置することで９人入ることができる。



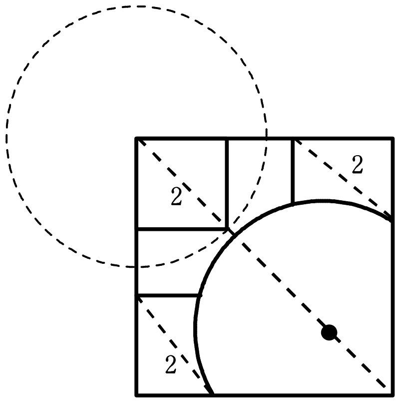
また，カラオケボックスを合同な９つの正方形に分別すると１つの正方形の対角線は $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ であり，これは２より小さいため鳩ノ巣原理より 10 人目を表す点はどこに打ってもいずれかの点との距離が２より小さくなる。したがって最大人数は9 人である。



(2)　まず６人のとき，以下のように５人を配置することで残りの１人は少なくとも灰色の領域の周および内部を動くことができるようになる。



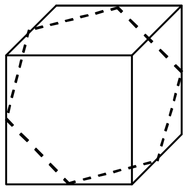
同様に考えれば６人では上手く動けばどの人との距離も２以上を保ってカラオケボックス全てを動くことができる。しかし灰色の領域の中心を点Ｐとすると，７人以上が部屋に入るとき，誰も点Ｐに移動することかできない。点Ｐから２以上離れている領域を図のように５つに分割したとき，全ての領域の周および内部の任意の２点の距離は２以下となる。なお左下と右上の領域は点線の長さが２となるように，左上の領域は対角線の長さが２の正方形となるように外枠の正方形の辺と平行な線で分割した。



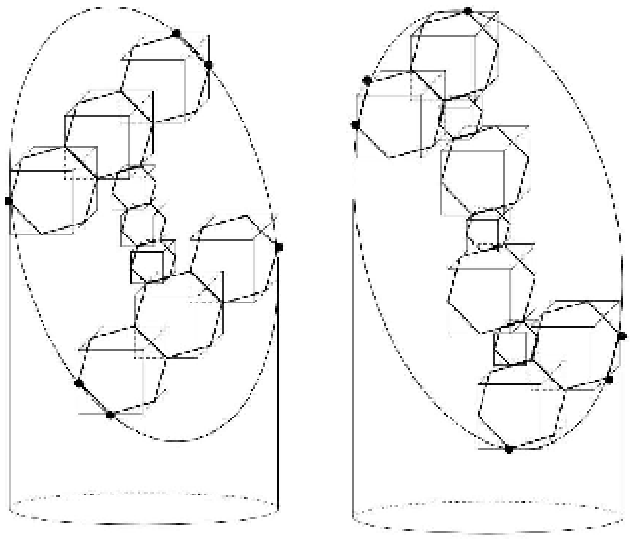
鳩ノ巣原理より少なくとも一つの領域は２つ以上の点を含むので１人配置した場合は全ての人の距離が２以上になるよう７人を配置することはできない。よって７人では移動できない場所が存在するので条件を満たす最大人数は６人である。

$\boxed{5}$

立方体を特定の角度の平面で切断すると，その断面は正六角形になる。この立方体を上から見ると右の図のようになる。

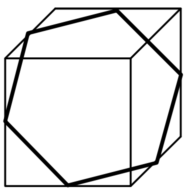


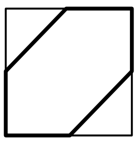
題意を示すためには断面が正六角形になるような角度の平面で切断したとき，切断面が問題文で与えられた２つの図形になるように立方体を積み重ねたものがどちらも同じ半径の円柱と適切な箇所を通るようにできることを示せばよい。実際以下のように立方体を積み上げ，円柱を配置するとその断面は問題文の図形となる。



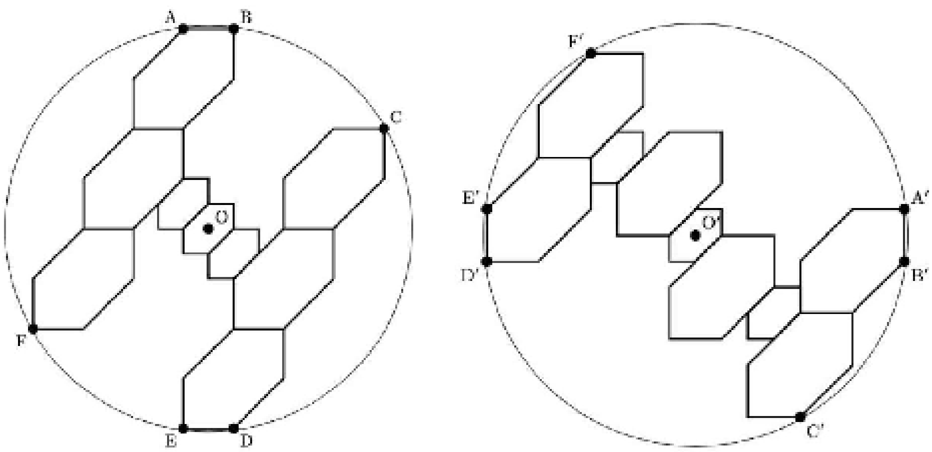
この２つの円柱の半径が等しいことを，円柱が円に見える角度から立体図を射影した平面図を用いて示す。

平面図の角度で立方体を射影すると以下のような六角形になる。

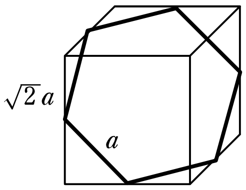


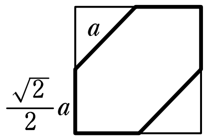


よって平面図を考える際には正六角形を円柱が円に見える角度で射影した時の六角形を並べ，問題文の図の位置を通るような円の半径を求めればよい。したがって平面図は以下のようになる。簡単のため立方体は断面の正六角形のみを記す。



断面が１辺の長さが a（＝1，2）の正六角形となるとき，立方体の１辺の長さは，$\sqrt{2}\,a$ であるから，平面図における正六角形の長さは以下のように表せる。





これより上の平面図で中心の立方体の重心から円との交点までの距離を求めると

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OD}=\mathrm{OE}=\mathrm{O'A'}=\mathrm{O'B'}=\mathrm{O'D'}=\mathrm{O'E'}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{65}{2}}$$

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OF}=\mathrm{O'C'}=\mathrm{O'F'}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{65}{2}}$$

よってどちらの図形にも半径が $\sqrt{\frac{65}{2}}$ の円が接する。すなわち 2 通りに立方体を積み上げた立体に対し，いずれも半径が $\sqrt{\frac{65}{2}}$ の円柱を上に示した立体図のように配置できるためその断面の楕円は 合同となる。これより題意は示された。

$\boxed{6}$

e_1, e_2, …, e_m が正の整数で p_1, p_2, …, p_m が相異なる m 個の素数であるとき, $p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$ の正の約数の個数は $(e_1+1)\times(e_2+1)\times\cdots\times(e_m+1)$ 個である。

(1) 正の約数の個数が桁数が5のとき $(e_1+1)\times\cdots\times(e_m+1)=5$ であるが, 5は素数なので, $m\geqq 2$ だと5が2以上の整数の積として書けることになり不適である。よって $m=1$ であり, $e_1=4$ でなければならない。よって, 5桁の 良い数は素数 p を用いて $n=p^4$ と表せる。p^4 が5桁の良い数であるとき, $10000\leqq p^4<100000$ である。

$10^4=10000$, $18^4=104976$ なので $10\leqq p\leqq 17$ である。この範囲にある素数 p は 11, 13, 17 なので, 求める個数は 3個

(2) 同様の議論から, k が素数のとき, k 桁の良い数 n はある数 p を用いて $n=p^{k-1}$ と表せる。これが k 桁なら

$$10^{k-1}\leqq p^{k-1}<10^k$$

とならねばならない。

前半の不等式より $10\leqq p$ だが, p は素数なので $11\leqq p$ である。そこで不等式 $11^{k-1}<10^k$ について考えるが, 両辺を 10^{k-1} で割って

$$(1.1)^{k-1}<10$$

を考える。実は, k が91以上の素数のとき, これは成り立たない。なぜならば, $(1+0.1)^{k-1}$ の展開を考えると

$$(1+0.1)^{k-1}\geqq 1+(0.1)(k-1)\geqq 1+(0.1)\times 90=10$$

となるからである。

まとめると, $k\geqq 91$ と p が両方とも素数のとき, p^{k-1} が k 桁以上になるには $p\geqq 11$ が必要だが, 11^{k-1} は $k+1$ 桁以上になってしまうため, p^{k-1} が k 桁となることはない。よって, k 桁の良い数は存在しない。91以上の素数 k は無限個存在するから, 題意は示された。

(3) n を m 桁 $(m\geqq 3)$ の良い数とする。また,

$$M=max\left\{\frac{10^{2m-1}}{n},\ \frac{n}{2}\right\}$$

とおく。つまり M は $\dfrac{10^{2m-1}}{n}$ と $\dfrac{n}{2}$ の2つのうち大きいほうの値とする。n は3桁以上なので, $2<\dfrac{n}{2}\leqq M$ である。以下の3ステップで証明する。

Step 1. ($M<p<\dfrac{10^{2m}}{n}$ を満たす素数 p が少なくとも1つ存在することを証明する)

N を, 実数 M の整数部分とする $(N\leqq M<N+1)$。$N\geqq 2$ なので, ベルトラン・チェビシェフの定理により $N<p<2N$ となる素数 p が取れる。この素数 p が

$$M<p<\frac{10^{2m}}{n}\ \cdots\ (1)$$

を満たすことを示そう。

$\boxed{\text{不等式(1)の左側}}$ p の取り方より $N<p$ である。N は整数だから, $N+1\leqq p$ である。よって $M<N+1\leqq p$ により成立する.

$\boxed{\text{不等式(1)の右側}}$ p, M の取り方から $p<2N\leqq 2M$ なので, $2M\leqq\dfrac{10^{2m}}{n}$ を証明すればよい。これを背理法により証明する。そこで,

$$10\cdot\frac{10^{2m-1}}{n}<2M=max\left\{2\cdot\frac{10^{2m-1}}{n},\ n\right\}$$

が成り立ったと仮定する。この場合，$2M \fallingdotseq 2\cdot\dfrac{10^{2m-1}}{n}$ である$\left(10\cdot\dfrac{10^{2m-1}}{n} > 2\cdot\dfrac{10^{2m-1}}{n}\right.$ であるため$\left.\right)$。

よって，$2M=n$ でなければならない。このとき，$10\cdot\dfrac{10^{2m-1}}{n} < n$，すなわち $10^{2m} < n^2$ となる。ところが n は m 桁なので $n \leqq 10^m$ であり，矛盾が導かれる。よって，仮定が誤りであり，

$$p < 2N \leqq 2M \leqq \frac{10^{2m}}{n}$$

を得るので，不等式が示された。

Step 2.（Step 1. で構成した p に対して，積 np は $2m$ 桁の良い数となることを証明する）

$\dfrac{10^{2m-1}}{n} \leqq M < p < \dfrac{10^{2m}}{n}$ より，$10^{2m-1} \leqq nM < np < 10^{2m}$。これは np が $2m$ 桁であることを意味する。np の正の約数の個数が $2m$ 個であることを示す。n が p で割り切れたとして矛盾を導く。このとき $\dfrac{n}{p}$ は正の整数であるが，$\dfrac{n}{2} \leqq M < p$ より

$$\frac{n}{p} < \frac{n}{M} \leqq \frac{n}{\frac{n}{2}} = 2$$

となるので，$\dfrac{n}{p} = 1$ でなくてはならない。しかし $n=p$ では n の正の約数の個数が 2 個なので，n が $m \geqq 3$ 桁の良い数であることに反する。よって n は p で割り切れない。

Step 3.（結論） 上の Step 1，Step 2 の構成を繰り返すことができるので，良い数は無限個存在する。

(4) 解答例

1 (2) の k の最小値

(2) にて，$(1.1)^k \geqq 10$ という不等式を解くことが必要でした。多少の計算機の利用を認めると，この不等式は $k \geqq 26$ で成り立つことが分かります。$k=26,\ 27,\ 28$ においても（計算機を利用すれば）良い数を構成することができるので，次が分かっています。

命題 1. k 桁の良い数が存在しない最小の k は $k=29$ である。

例 2. 26，27，28 桁の良い数の例：

- 26 桁：$101^{12}\cdot 11 = 12395075331451666927273211$
- 27 桁：$p_1 = 101,\ \ p_2 = 103,\ \ p_3 = 10^9 + 7$ という10の冪に近い素数を取る。このとき
  $(p_1p_2p_3)^2 = 108222410515113731302898041$ が 27 桁の良い数。
- 28 桁：$101^{13}\cdot 11 = 1251902608476618359654594311$

2 良い数の比率に関する予想

(3) にて良い数が無数に存在することが示せましたが，どのくらい多く分布しているのかはかなり難しい問題だと思われます。$f(m)$ で m 以下の良い数の個数を表すとすると，次を予想しましたが，未解決です。

予想 3.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(m)}{m} = 0$$

この予想の根拠は以下の事実にあります。

命題 4. $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{f(m)}{m}$ が存在すると仮定したとき，その極限値は 0 である。

Proof. 極限値を α とする。(2) の議論より，p が十分大きい素数であるならば $10^{p-1} \leqq x < 10^p$ の範囲に良い数

は存在しないため $f(10^p-1)=f(10^{p-1}-1)$ が従う。よって，

$$\alpha=\lim_{p\to\infty}\frac{f(10^{p-1}-1)}{10^{p-1}-1}=\lim_{p\to\infty}\frac{10^p-1}{10^{p-1}-1}\cdot\frac{f(10^p-1)}{10^p-1}=10\alpha$$

より $\alpha=0$ を得る。

3　良い階乗数

命題5.　$n!$ が良い数であるような正の整数 n は $n=1$ に限る。

Proof.　$a_n=[n/2]$， $b_n=[n/3]$ とする。n までの正の整数に偶数は a_n 個，3の倍数は b_n 個あることから，$n!$ は $2^{a_n}3^{b_n}$ で割り切れる。よって $n!$ の正の約数の個数 d は $(a_n+1)(b_n+1)\leqq d$ を満たす。 $n!$ は d 桁なので

$$n!\geqq 10^{d-1}\geqq 10^{(a_n+1)(b_n+1)-1}\geqq 10^{(n/2)\cdot(n/3)-1}=10^{(n^2/6)-1}$$

ところが，不等式 $n!\geqq 10^{(n^2/6)-1}$ は $n=1, 2, 3$ でしか成り立たず(詳細略)， $2!=2, 3!=6$ は良い数ではない。

よって $n=1$ のみである。