令和4年度

京都・大阪マス・インターセクション

大阪会場問題

注 意 事 項

1. 問題は1ページから5ページまであります。
2. 解答用紙は，全部で5枚あります。
3. あなたの受験番号と名前をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は，問題番号に対応した解答用紙に記入してください。
5. 解答時間は3時間です。なお，トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

$\boxed{1}$

　$AB=BC=8$， $CD=DA=5$， $\angle A=\angle C=90°$ であるような四角形 ABCD がある。この四角形の内部を半径 1 の円が自由に動く。ただし，辺に接する場合も含む。

　このとき，四角形 ABCD の内部のうち円が通過できない領域の面積の総和を求めよ。

$\boxed{2}$

$mn=3240001$ を満たす整数 m，n の組を 1 つ求めよ。ただし，$2 \leqq m \leqq n$ とする。

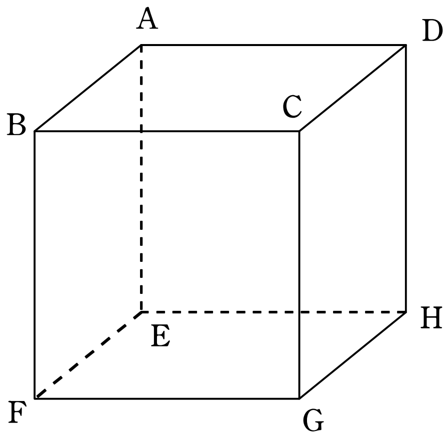
$\boxed{3}$

立方体 ABCD − EFGH の内部に 2 点 P，Q があり，

$AP = BP = EP = FP = CQ = DQ = GQ = HQ = PQ = 1$

を満たしている。

このとき，立方体 ABCD − EFGH の 1 辺の長さを求めよ。



$\boxed{4}$

A，B，C の 3 人が以下のルールに従って 3 人でじゃんけんを繰り返すゲームをする。ただし，A，B，C ともグー，チョキ，パーのいずれかを等しく $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すとする。

ルール

(i)　はじめは全員平準状態とする。

(ii)　平準状態の人が勝つとその人はリーチ状態となる。また，平準状態の人が負けるかあいこになると，平準状態のままである。

(iii)　リーチ状態の人が負けるかあいこになるとその人は平準状態に戻る。

(iv)　勝った人の中でリーチ状態の人が 1 人だけいるとき，その人が優勝する。この時点でゲームは終了する。

(v)　リーチ状態の人が 2 人いて，その 2 人が勝ったときには優勝は決まらず 2 人はリーチ状態のまま次のじゃんけんをする。

例

1 回めに A と B が勝ってリーチ状態であるとき，2 回めも A と B が勝つと A と B がリーチ状態のまま 3 回めのじゃんけんをする。A と B がリーチ状態，C が平準状態で勝ったのが A と C のときは A の優勝となる。

このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　2 回めのじゃんけんで A が優勝する確率を求めよ。

(2)　3 回めのじゃんけんで優勝が決まる確率を求めよ。

5

A と B の 2 人が，次のようなゲームを行う。

ゲーム

最初に 2 以上の自然数 N を決定し，机の上に N 個の石を置く。
その後，以下の「ターン」を繰り返す。ゲーム開始時は「第 1 ターン」である。
ターン：
「第 k ターン」では，まず A が 1 個以上 k 個以下の石を机の上から取る。
ここで机の上の石が無くなったならば，A の勝ちでゲームが終了する。
そうでなければ，続けて B が 1 個以上 k 個以下の石を机の上から取る。
ここで机の上の石が無くなったならば，B の勝ちでゲームが終了する。
そうでなければ，次の第 $(k+1)$ ターンを始める。

例えば，次のようにゲームが展開する。

ゲームの例

$N=12$ とする。
最初，机の上に 12 個の石を置く。以降，【　】内の値は机の上に残っている石の個数である。
第 1 ターン：A が 1 個取る【11】。　B が 1 個取る【10】。
第 2 ターン：A が 2 個取る【8】。　B が 1 個取る【7】。
第 3 ターン：A が 3 個取る【4】。　B が 2 個取る【2】。
第 4 ターン：A が 2 個取る【0】。　石が無くなったため，最後に石を取った A の勝ち。

このゲームについて，「A が必勝」とは「B がどのように石を取っても，それを見た上で A には自身が勝つような石の取り方が存在すること」と定義する。「B が必勝」についても同様に定義する。

このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$N=5$，9 のとき，「B が必勝」であることを示せ。

(2)　$N=6$，11 のとき，「A が必勝」であることを示せ。

(3)　このゲームは，N の値によって「A が必勝」，「B が必勝」のどちらか一方が成り立つ。「B が必勝」となるような N の必要十分条件を求めよ。