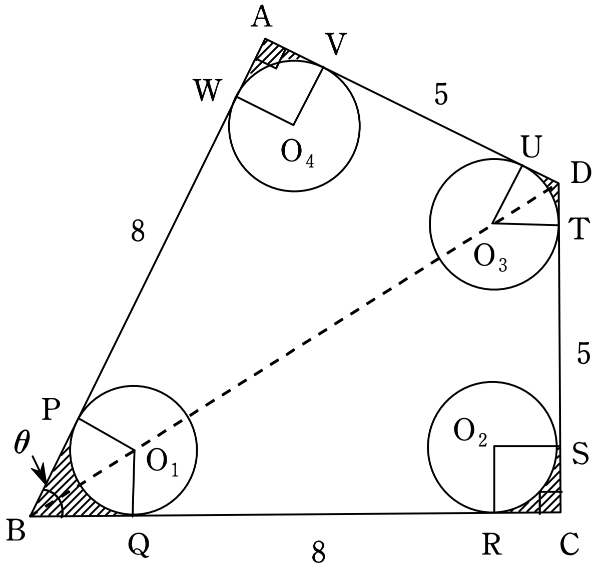
1

右図のように各点をとり，$\angle B=\theta$とする。
求める領域の面積は図の斜線部である。



四角形 ABCD の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot2=40$

$\triangle ABD\equiv\triangle CBD$ （$\because$ 3 辺の長さが等しい）
$\triangle PBO_1\equiv\triangle QBO_1$ （$\because$ 3 辺の長さが等しい）
であり，また
$\triangle ABD\backsim\triangle PBO_1$ （$\because$ 2 つの角が等しい）
である。
以上より
四角形 ABCD $\backsim$ 四角形 $PBQO_1$ であり，
相似比は 5：1 である。よって，面積比は 25：1 。
同様に，四角形ABCD $\backsim$ 四角形 $\triangle UO_3TD$であり，
相似比は 8：1 である。よって，面積比は 64：1 。
求める領域の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S&=\text{四角形 }O_1PBQ-\text{扇形}O_1PQ+\text{四角形}UO_3TD-\text{扇形}O_3UT\\
&\quad+\text{正方形 }O_2RCS-\text{扇形}O_2RS+\text{正方形}O_4WAV-\text{扇形}O_4WV\\
&=\frac{40}{25}-1^2\cdot\pi\cdot\frac{180^\circ-\theta}{360^\circ}+\frac{40}{64}-1^2\cdot\pi\cdot\frac{\theta}{360^\circ}+1^2-1^2\cdot\pi\cdot\frac{90^\circ}{360^\circ}+1^2-1^2\cdot\pi\cdot\frac{90^\circ}{360^\circ}\\
&=\frac{169}{40}-\pi
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
3240001&=3240000+1\\
&=4\cdot3^4\cdot10^4+1\\
&=4\cdot30^4+1\\
&=(2\cdot30^2+1)^2-2\cdot2\cdot30^2\\
&=1801^2-60^2\\
&=(1801+60)(1801-60)\\
&=1861\cdot1741
\end{aligned}
$$

よって， $m=1741$ ， $n=1861$

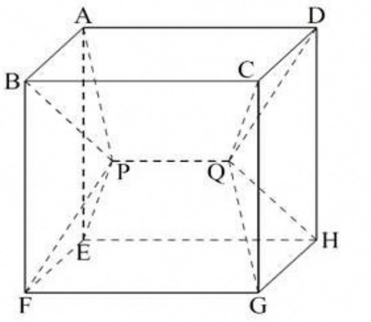
$\boxed{3}$

点 P，Q を図示すると右図のようになる。

ここで，立方体の 1 辺の長さを x とする。

点 P，Q から側面 BCGF に下ろした垂線との交点をそれぞれ点 R，S とし，底面 EFGH に下ろした垂線との交点をそれぞれ点 T，U とする。

また，点 Q から側面 CGHD に下ろした垂線との交点を点 V とする。このとき，図 1 から図 3 のようになる。



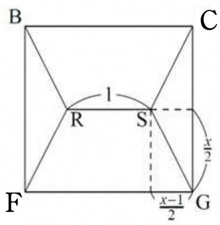


図 1

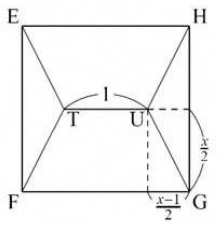


図 2

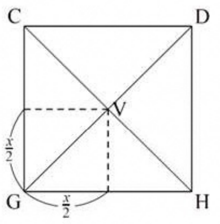


図 3

これらより，線分 GQ を対角線とする直方体を作ると図 4 のようになる。

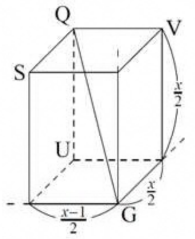


図 4

ここで， GQ＝1 であるから，$\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$

すなわち，$3x^2-2x-3=0$ より，$x=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

求める立方体の 1 辺の長さは 1 より大きいから，1 辺の長さは $x=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$

$\boxed{4}$

(1)　2 回めで A が優勝するのは

(i)　1 回めで A のみリーチ状態となり 2 回めで A が勝つパターン

(ii)　1 回めで A を含んだ 2 人がリーチ状態となり 2 回めは A の一人勝ちまたはリーチ状態となっていない 1 人と A の 2 人で勝つパターンの 2 パターンなので

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{81}$$

となる。

(2)　3 回めで優勝が決まるのは

(i)　1 回めにあいことなり 2 回めから前問の通りに A，B，C のいずれかが優勝するパターン

(ii)　1 回めに 1 人のみリーチ状態となり，次に別の 1 人がリーチ状態となりその人が優勝するパターン

(iii)　1 回めに 1 人のみリーチ状態となり，次に残る 2 人がリーチ状態となりそのいずれかが優勝するパターン

(iv)　1 回めに 2 人がリーチ状態となり，次に残る 1 人がリーチ状態となりその人が優勝するパターン

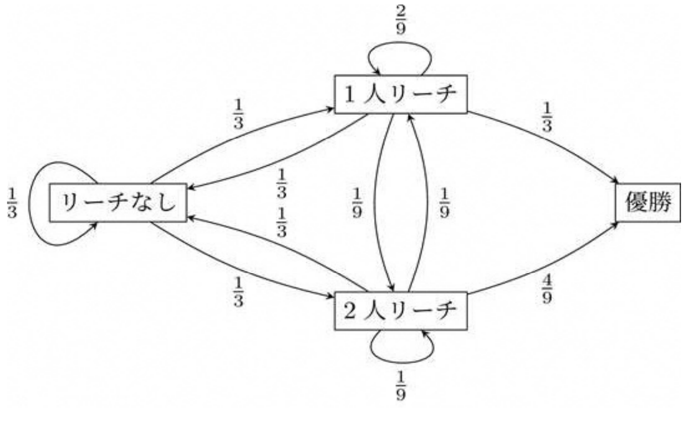
(v)　1 回めに 2 人がリーチ状態となり，次にその 2 人がまたリーチ状態となりそのいずれかが優勝するパターン

の 5 パターンなので

$$\frac{1}{3}\times\frac{7}{81}\times3+\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{38}{243}$$

となる。

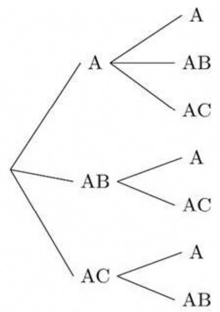
※　状態遷移図を描くと以下のようになる。



【別解】

特定の 1 人のみが勝つ確率は $\frac{1}{9}$，特定の 2 人が勝つ確率は $\frac{1}{9}$，あいこになる確率は $\frac{1}{3}$ である。

(1)　2 回めで A が優勝するときは以下の樹形図で表される。



ただし A が勝つことを A，A と B が勝つことを AB といったように表記している。

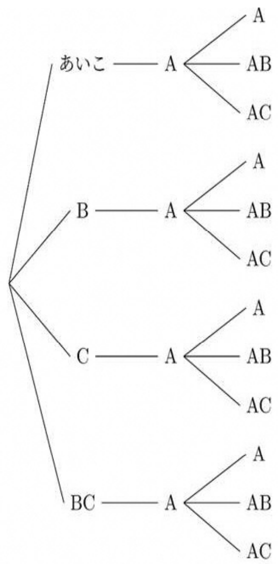
よって求める確率は　$\frac{1}{9}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{81}$

(2)　3 回めで A が優勝するときを考える。

2 回めに A のみリーチ状態となるか，A を含む 2 人がリーチ状態となるかで場合分けすると良い。

(i)　2 回めに A のみリーチ状態となるとき

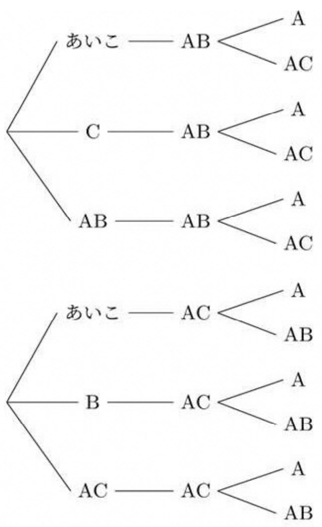
1 人のみリーチ状態となった次のじゃんけんで 1 人のみリーチ状態となる場合と 2 人がリーチ状態となった次のじゃんけんで 1 人のみリーチ状態となる場合のいずれの場合もリーチ状態で継続する人がいないため，以下の樹形図のようになる。



よってこのときの確率は　$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times 3\right)\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{9}\times 3\right)=\frac{18}{9^3}$

(ii)　2 回めに A を含む 2 人がリーチ状態となるとき

1 人のみリーチ状態となった次のじゃんけんで 2 人がリーチ状態となる場合はリーチ状態で継続する人がいないが，2 人がリーチ状態となった次のじゃんけんで 2 人がリーチ状態となる場合はルール(v) によりその 2 人がリーチ状態で継続するため，以下の樹形図のようになる。



よってこのときの確率は　$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\times 2\right)\times\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{1}{9}\times 2\right)\times 2=\dfrac{20}{9^3}$

以上より 3 回目で A が優勝する確率は　$\dfrac{18+20}{9^3}=\dfrac{38}{9^3}$

A，B，C の優勝する確率は等しいので，求める確率は　$\dfrac{38}{9^3}\times 3=\dfrac{38}{243}$

5

以降，「残っている石の個数」ではなく「2 人が取った石の合計数」に着目する。カッコ内の数字は「2 人が取った石の合計数」とする。

(1)　$N=5$ のとき

第 1 ターンでは，A も B も石を必ず 1 個取る。

第 1 ターン：開始時(0)

A が 1 個取る(1)→B が 1 個取る(2)

第 2 ターン開始時点で机の上には石が 3 個残っている。ここで，次のように B が (3−(第 2 ターンで A が取った個数))個取ると，B が第 2 ターンで必ず勝利できる。

第 2 ターン：開始時(2)

A が 1 個取る(3)→B が 2 個取る(5)

A が 2 個取る(4)→B が 1 個取る(5)

$N=9$ のとき

第 2 ターンで $N=5$ の場合と同様に行動すると，第 3 ターン開始時点で机の上には石が 4 個残っている。ここで，次のように B が (4−(第 3 ターンで A が取った個数))個取ると，B が第 3 ターンで必ず勝利できる。

第 3 ターン：開始時(5)

A が 1 個取る(6)→B が 3 個取る(9)

A が 2 個取る(7)→B が 2 個取る(9)

A が 3 個取る(8)→B が 1 個取る(9)

以上を組み合わせると，「Bは第2ターンで(3−(第2ターンでAが取った個数))個取り，第3ターンで(4−(第3ターンでAが取った個数))個取る」とすればよい。

(2)　$N=6$ のとき

第2ターンでAが石を1個取ると，机の上には石が残り3個となり，ここで次のようにAが(3−(第2ターンでBが取った個数))個取ると，Aが第3ターンで勝利できる。

第2ターン Bから：開始時(3)

Bが1個取る(4)→第3ターン Aが2個取る(6)

Bが2個取る(5)→第3ターン Aが1個取る(6)

$N=11$ のとき

Aは，第2ターンで石を1個，第3ターンで(4−(第2ターンでBが取った個数))個取り，第4ターンで(4−(第3ターンでBが取った個数))個取ることで，第4ターンで必ず勝利できる。

第2ターン Bから：開始時(3)

Bが1個取る(4)→第3ターン Aが3個取る(7)→(続く)

Bが2個取る(5)→第3ターン Aが2個取る(7)→(続く)

第3ターン Bから：開始時(7)

Bが1個取る(8)→第4ターン Aが3個取る(11)

Bが2個取る(9)→第4ターン Aが2個取る(11)

Bが3個取る(10)→第4ターン Aが1個取る(11)

(3)　(1)の過程を参考にして観察すると，

$N=2$ のとき，Bが第1ターンで勝つ

$N=2+3$ (5) のとき，Bが第2ターンで勝つ

$N=2+3+4$ (9) のとき，Bが第3ターンで勝つ

$N=2+3+4+\cdots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}-1=\dfrac{k(k+3)}{2}$ のとき，Bが第 k ターンで勝つことが予想される。

これが「Bが必勝」となる必要十分条件であることを証明する。必要十分条件であることを示すためには，「条件を満たすときBが必勝」かつ「条件を満たさないときAが必勝」であることを示すことが求められる。

(i)　N が上の条件を満たすとき，Bが必勝

$M_k=\dfrac{k(k+3)}{2}$ とする。$M_{k+1}=M_k+(k+2)$ に注意。$N=M_k$ のとき，Bが第 k ターンで勝つことを示す。

第 i ターンでBが取った後，2人が取った石の合計が M_i であるとする。第 $i+1$ ターンでAが石を a_{i+1} ($1\leqq a_{i+1}\leqq i+1$) 個取ったとき，Bは石を $(i+2-a_{i+1})$ 個取ることで，第 $i+1$ ターン終了時点で2人が取った石の合計数を M_{i+1} にすることができる。これを繰り返せば，第 k ターン

で取った石の合計が M_k 個になり，B が勝つ。

(ii)　N が上の条件を満たさないとき，A が必勝

この場合は，$M_k < N < M_{k+1}$ を満たす k がただ一つ存在する。このとき，A が第 $k+1$ ターンで勝つことを示す。 $N = M_k + l$ $(1 \leqq l \leqq k+1)$ と表されることに注意。

まず第 i ターン ($1 \leqq i \leqq l-1$ ， $l=1$ の時はこの手順を飛ばす)について，第 i ターンで B が石を b_i $(1 \leqq b_i \leqq i)$ 個取ったとき，第 $i+1$ ターンで A は石を $(i+2-b_i)$ 個取る。

その後，第 j ターン($l \leqq j \leqq k$ ， $l=k+1$ の時はこの手順を飛ばす)について，第 j ターンで B が石を b_j 個取った時，第 $j+1$ ターンで B は石を $(j+1-b_j)$ 個取る。

以上を繰り返すと，第 $k+1$ ターンの A が取った時点で 2 人が取った石の個数は

$$1 + b_1 + (3 - b_i) + b_2 + (4 - b_2) + \cdots + b_{l-1} + (l+1-b_{l-1}) + b_l + (l+1-b_l) + \cdots + b_k + (k+1-b_k)$$
$$= 1 + 3 + 4 + \cdots + (l+1) + (l+1) + \cdots + (k+1)$$
$$= l + (2+3+\cdots+l) + (l+1) + \cdots + (k+1)$$
$$= l + M_k = N$$

となり，第 $k+1$ ターンで A が勝つ。