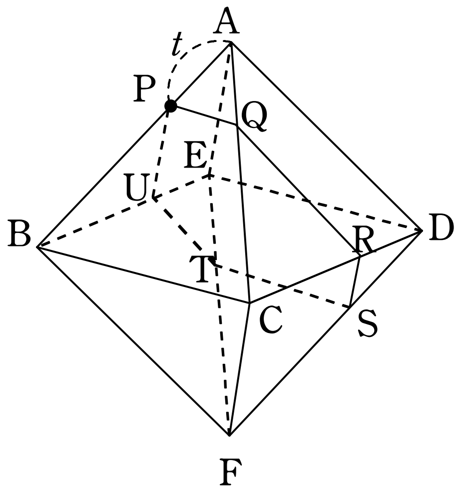
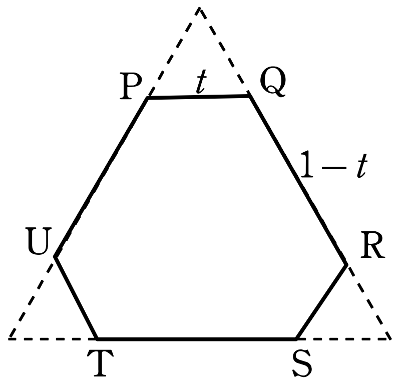
$\boxed{1}$





1 辺の長さが $1+t$ の正三角形から，1 辺の長さが t の正三角形 3 つを引いて，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(1+t)^2-3\times\frac{\sqrt{3}}{4}t^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+2t-2t^2)$$

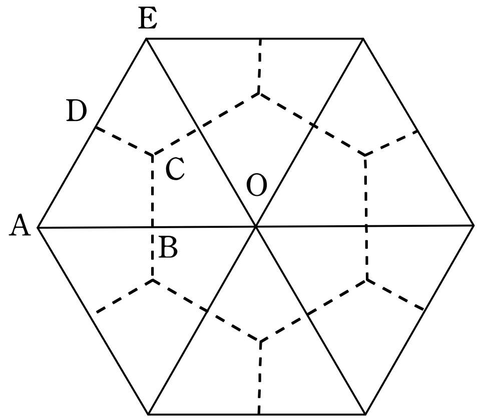
$\boxed{2}$

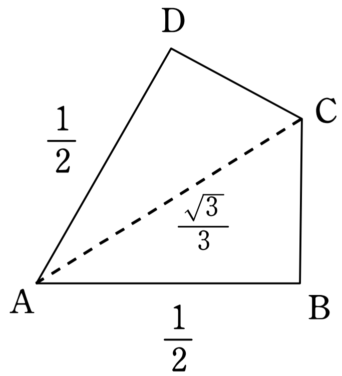
正六角形を右図のような 18 個の合同な凧形に分割する。
凧形ABCDについて，点 C は正三角形 OAE の重心にあたる。

よって，$\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ゆえに，凧形の長い方の対角線の長さは $\frac{\sqrt{3}}{3}$ であり，
この凧形内部及び境界線上の任意の 2 点の距離は
$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 以下となる。

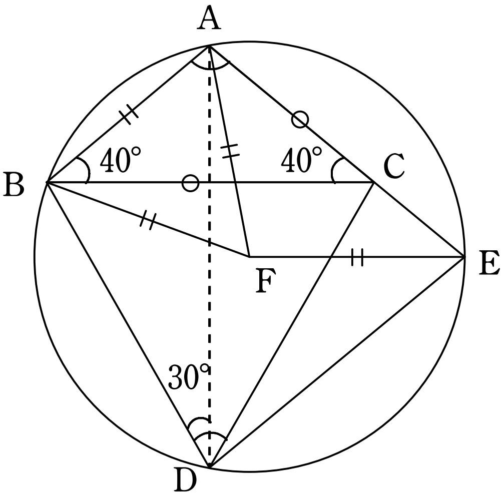
鳩ノ巣原理より少なくとも 1 つの凧形は 2 つ以上の点を含む。
したがって，その 2 点の距離は $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 以下である。





$\boxed{3}$

$\angle ABC = \angle ACB = 40°$
図のように $\triangle ABF$ が正三角形となるように，点 F をとる。
ここで $\angle FAE = 40°$ となり
$\triangle ABC \equiv \triangle FAE$（2辺とその間の角が等しい）
よって　$AF = FE$ となり，3点 A，B，E は同一円周上にある。
また，点 A と点 D を結ぶと $\angle ADB = 30°$
$\angle AFB$ を中心角とし考えると，点 D も円周上にある。
よって　円に内接する四角形の性質より $\angle BDE = 80°$
ゆえに　$\angle CDE = 20°$



$\boxed{4}$

$n = 10a + b$ とおく。ただし，a, b は整数で $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$ ……①　を満たす。

$10^n = 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots\cdots + 10^3 + 10^2) + 100$ より，$10^n - n$ の各位の数の和は

$b = 0$ のとき　$9(n-2) + 10 - a$　　すなわち　$89a - 8$

$b \fallingdotseq 0$ のとき　$9(n-2) + 9 - a + 10 - b$　　すなわち　$89a + 8b + 1$

$b = 0$ のとき

$89a - 8 \equiv 0 \pmod{50}$ を満たす自然数 a を求める。

$89a - 8 \equiv 0 \pmod{50}$ より $89a \equiv 1958 \pmod{50}$ で 89 と 50 は互いに素なので $a \equiv 22$

①より $a \equiv 22 \pmod{50}$ となる自然数 a は存在しない。

よって $b = 0$ は不適。

$b \fallingdotseq 0$ のとき

$89a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{50}$ を満たす自然数 a, b を求める。

このとき，$89a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{10}$ を満たす必要がある。

よって $9a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{10}$

これと①を満たす自然数の組 (a, b) は

$(a, b) = (1, 5), (3, 4), (3, 9), (5, 3), (5, 8), (7, 2), (7, 7), (9, 1), (9, 6)$ ……②

また，$89a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{25}$ も満たす必要がある。

よって $14a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

②のうち，これを満たす自然数の組 (a, b) は

$(a, b) = (3, 4), (9, 6)$

これらは確かに $89a + 8b + 1 \equiv 0 \pmod{50}$ を満たす。

したがって $(a, b) = (3, 4), (9, 6)$ より求める自然数 n は　34, 96 ……（答）

$\boxed{5}$

(1)　正の約数の平均値は $\dfrac{1+n}{2}$ であり，n は奇数であるからこれは整数。よって n はよい数。

(2)　正の約数の平均値は $\dfrac{(1+p)(1+q)}{4}$ であり，p, q は奇数であるからこれは整数。よって pq はよい数。

(3)　[1]　$p \fallingdotseq 5$ のとき，$5n$ すなわち $5p^2$ の正の約数は $1, p, p^2, 5, 5p, 5p^2$ でありこの平均値は $1+p+p^2$

よって $5n$ はよい数。

[2]　$p=5$ のとき，$5n=125$ であるから正の約数の平均値は $\dfrac{1+5+25+125}{4}=39$

よって $5n$ はよい数。

[1][2]より$5n$ はよい数。

(4)　[1]　$p \fallingdotseq 7$ のとき，$7n$ すなわち $7p^3$ の正の約数は $1, p, p^2, p^3, 7, 7p, 7p^2, 7p^3$

この平均値は $1+p+p^2+p^3$ であるから，$7n$ はよい数。

[2]　$p=7$ のとき，$23n$すなわち $23p^3$ の正の約数は $1, p, p^2, p^3, 23, 23p, 23p^2, 23p^3$

この平均値は $3(1+p+p^2+p^3)$ であるから，$23n$ はよい数。

[1][2]より$7n$ か $23n$ の少なくとも一方はよい数である。したがって示された。

(注) $p=7$ のときは，$23n$ のほかに n もよい数になる。

(4 $\boxed{\text{別解}}$)　(3)と同様に考えれば、$31n$ はよい数である。したがって示された。

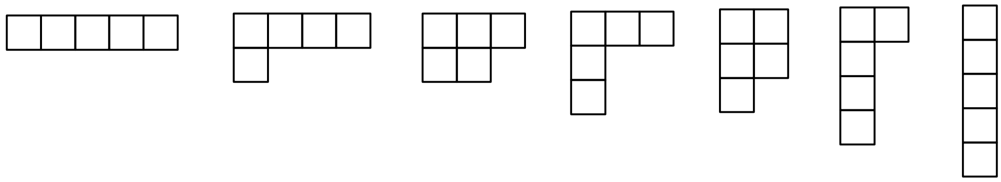
(5)　たとえば $n=p^4$ （p は素数）のときも，$19n$ か $29n$ の少なくとも一方はよい数であることが示されます。

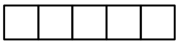
$n=pq^2$ （p，q は素数，$p \fallingdotseq q$）のときも，$11n$ か $23n$か $47n$ の少なくともひとつはよい数です。

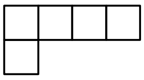
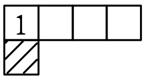
他にも様々な場合を考えてみてください。

6

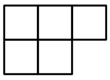
(1)

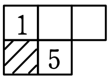


(2) [1]  を枠とする盤は 1 通り

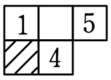
[2]  を枠とする盤は  の  に 2，3，4，5 のどれかを書き込めば,

残りの数の書き込み方は 一意に定まるので 4 通り

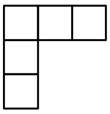
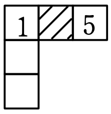
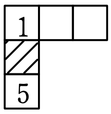
[3]  を枠とする盤について

[3−1]  の  に 2，3，4 のどれかを書き込めば, 残りの数の書き込み方は一意に

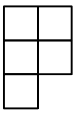
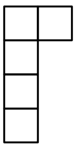
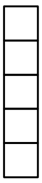
定まるので 3 通り

[3−2]  の  に 2，3 のどれかを書き込めば, 残りの数の書き込み方は一意に

定まるので 2 通り

[4]  を枠とする盤は  ，  の  に2, 3, 4 のどれかを書き込めば,

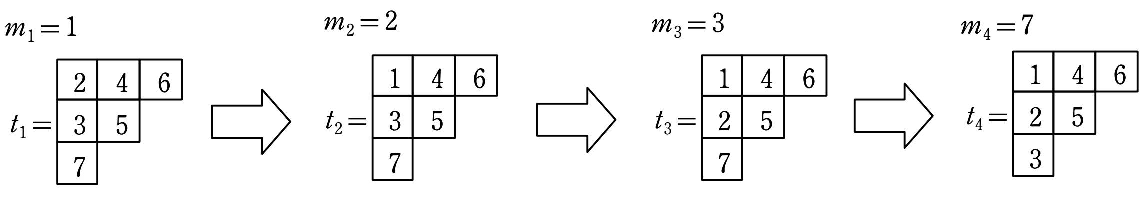
残りの数の書き込み方は一意に定まるので 6 通り

 ，  ，  を枠とする盤は, 対称性からそれぞれ [3]，[2]，[1] の場合と同じ

数だけある。

以上より　$1+4+5+6+5+4+1=26$ (通り)

(3)



よって

$$\Rightarrow \quad t_5=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1} 7\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$(t\leftarrow 1)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1} 7\\\cline{1-1}\end{array}$$

(4)

$B(p)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$ $\quad R(p)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$ となる p を $p=p_1p_2p_3p_4p_5$ とする。

5 番目に $\boxed{4}$ が付け加えられたと分かるので 4 は $B(p)$ の 1 段目にある 4 より小さい最大の整数をバンプしたことにより, 2 段目に付け加えられたことがわかる。よって

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\qquad p_5=2$$

4 番目に $\boxed{5}$ が付け加えられたとわかるので

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\qquad p_4=5$$

以下同様に考えて

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}\qquad p_3=1$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\qquad p_2=4\ ,\ p_1=3$$

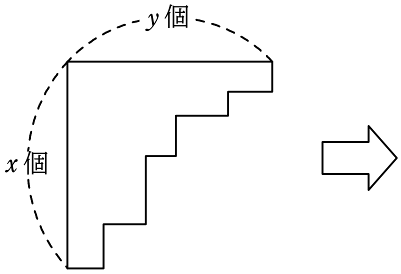
以上より $\quad p=34152 \quad$ である。

(5) 順列 $p\in P_n$ から $(B(p), R(p))$ を作成する手順の途中で, p_k をバンプするとき, $\boxed{p_k}$ の箱が下につくときは，順列の中に $\quad p_j>p_k \quad$ かつ $\quad j<k$

となるものが存在していることになる。

このことを考えると，$B(p)$，$R(p)$ の枠の 1 番左の列に正方形が x 個並んでいるとき，減少部分列の最大の長さは x となる。同様の考え方で，$B(p)$，$R(p)$ の枠で上から 1 段目の行に y 個の正方形が

並んでいるとき，増大部分列の最大の長さは y となる。



p の最大の増大部分列の長さは y，
最大の減少部分列の長さは x である.

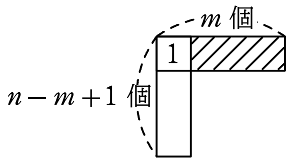
ここで

$$ST_n=\{d\text{を枠とし,}\,1\text{から}\,n\,\text{までの数を}\,1\,\text{つずつ書き込んだ盤}\ \mid\ d\in Y_n\}$$

とする。

(4) で考えたように，1 から n が 1 つずつ書かれている 2 つの盤のペアから順列が構成でき，この対応から P_n と $ST_n\times ST_n$ の間に 1 対 1 の対応があることがわかる。

以上のことから，1 から n の順列 $p\in P_n$ で題意を満たすものを考えると，p から構成される $B(p)$，$R(p)$ の枠は，次のようにならなければならない。



このとき, この枠に 1 から n を規則A を守って書き並べる方法を数えると, その総数は, 上の に 1 以外の $n-1$ 個の数から $m-1$ 個の数を選ぶ選び方の総数 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}$ に等しい。なぜなら規則A より，選んだ $m-1$ 個の数の並びは一意に決まり，残りの $n-m$ 個の数の並びも一意に決まってしまうからである。

よって，題意を満たす順列に対応する $(B(p),R(p))$ のペアの総数は $({}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1})^2$ であり, これが題意を満たす順列の総数である。