令和３年度

京都・大阪マス・インターセクション

注 意 事 項

1. 問題は1ページから6ページまであります。
2. 解答用紙は，全部で5枚あります。
3. あなたの受験番号と名前をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は，問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお，問題番号$\boxed{1}$については(2)(ア)は証明を，それ以外は答えのみを記入してください。問題番号$\boxed{2}$～$\boxed{5}$については答えのみでなく考え方等も記入してください。（問題番号$\boxed{2}$～$\boxed{5}$については，考え方等も採点対象となります。）
5. 解答時間は3時間です。なお，トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

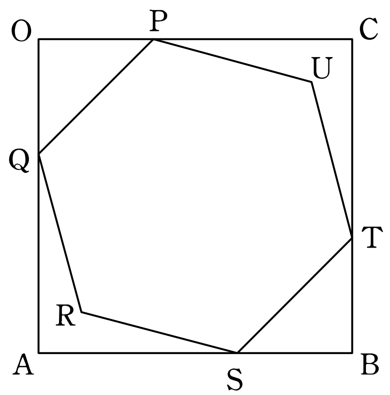
(1) $f(n)=\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ とする。

このとき， $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$ の値を求めよ。

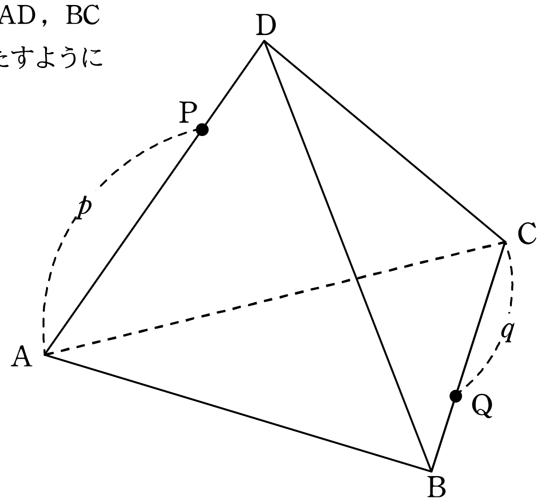
(2) 右図のように，正六角形PQRSTUの4点P，Q，S，Tがそれぞれ正方形OABCの辺OC，OA，AB，BC上にある。

(ア) OP＝OQを示せ。

(イ) 正六角形PQRSTUの一辺の長さを1とするとき，正方形OABCの一辺の長さを求めよ。



(3)　右図のような一辺の長さが1の正四面体ABCDを考える。辺AD，BC上にそれぞれAP＝p，CQ＝q（$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$）を満たすように点P，Qをとる。線分PQの長さをp，qを用いて表せ。
また，その最小値を求めよ。



(4)　4日間の休日を利用して，4箇所の観光地のうち1箇所以上を訪れる計画を立てている。以下の「条件」を満たす4日間の計画の立て方は何通りあるか。

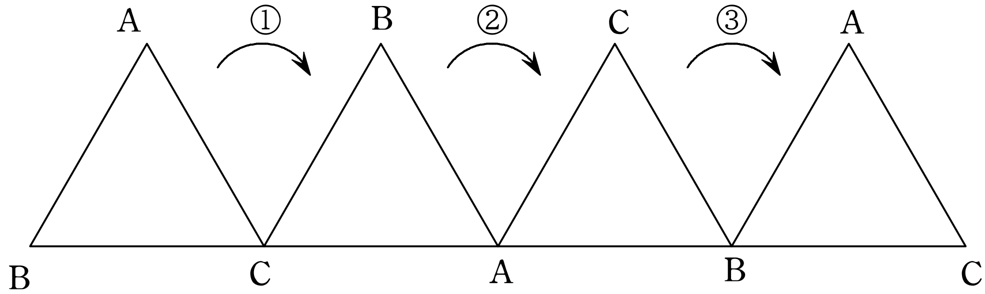
「条件」	・1日に訪れることができる観光地は最大1箇所であり，観光地を訪れない日があってもよい ・同じ観光地を訪れることはない

$\boxed{2}$　一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。この正三角形を以下の手順 ①②③ により移動させるとき，辺 AB が通過する領域の面積を求めよ。

① まず，頂点 C を中心として，時計回りに 120° 回転させる。

② 次に，頂点 A を中心として，時計回りに 120° 回転させる。

③ 最後に，頂点 B を中心として，時計回りに 120° 回転させる。



$\boxed{3}$　黒板に整数 a が書かれている。A さんと B さんは，以下の「ルール」に従って操作を行う。

「ルール」　A さん：黒板に書かれている整数を消し，消した整数に 1 を足した整数を黒板に書く。 　　　　　B さん：黒板に書かれている整数を消し，消した整数に 2 を足した整数を黒板に書く。

この操作を，A さんと B さんが交互に繰り返し行うものとし，最初の操作は A さんが行うものとする。
次の各問いに答えよ。

(1)　$a=1$ のとき，A さんまたは B さんが書く整数に 2021^2 は現れるか。また，現れる場合はどちらが書くことになるか。

(2)　$a=0$ のとき，どんな平方数を考えても，A さんと B さんが書く整数に，その平方数が現れることを証明せよ。ただし，平方数とは自然数の 2 乗で表される整数をいう。

$\boxed{4}$ 一辺の長さが2の正四面体ABCDがある。次の各問いに答えよ。

(1) 2つの面ABC，BCDの重心をそれぞれG_1，G_2とするとき，線分G_1G_2の長さを求めよ。

(2) 各頂点を中心とする半径$1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$の球が4個と，各辺の中点及び各面の重心を中心とする半径$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$の球が10個ある。

次の「条件」を満たす経路について考える。ただし，この問題における経路とは，始点と終点が異なる途切れない1本の曲線のことをいう。

「条件」・ 球の表面及び内部と，球と球との接点のみを通ることができる ・ 1度球の内部を通った場合，その球の外部に出た後に再び内部を通ることはできない

このような経路は，最大何個の球の内部を通ることができるか。その個数と，理由を述べよ。

$\boxed{5}$ 一の位の数が 0 でない自然数 P に対して，各位の数を逆から並べてできる自然数を Q とする。
たとえば，$P=12345$ のとき，$Q=54321$ である。
一の位の数が 0 でない 5 桁の自然数 P について， $P \neq Q$ であるとする。このとき，P が Q の倍数となるような P をすべて求めよ。