$\boxed{1}$ (1) $f(n)=\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}-\dfrac{\sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ より

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{99}}-\dfrac{\sqrt{97}}{\sqrt{98}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}-\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{99}}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}-\dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{10}$

(2) (ア) PQ∥TS より ∠QPS＝∠TSP

OC∥AB より ∠OPS＝∠BSP

よって，∠OPS−∠QPS＝∠BSP−∠TSP

すなわち， ∠OPQ＝∠BST

よって，△OPQ ≡ △BST

（∵ 斜辺と１鋭角の等しい直角三角形）

であるから， OP＝BS

正方形の一辺の長さを x，OP＝ a，OQ＝ b とすると，

AS＝ $x-a$ で，

$PS^2=PQ^2+QS^2$

$=(a^2+b^2)+\{(x-a)^2+(x-b)^2\}$

一方，P からAB に下ろした垂線の足をH とすると，

$PS^2=PH^2+HS^2$

$=x^2+|(x-a)-a|^2=x^2+(x-2a)^2$

よって，

$(a^2+b^2)+\{(x-a)^2+(x-b)^2\}=x^2+(x-2a)^2$

整理して，

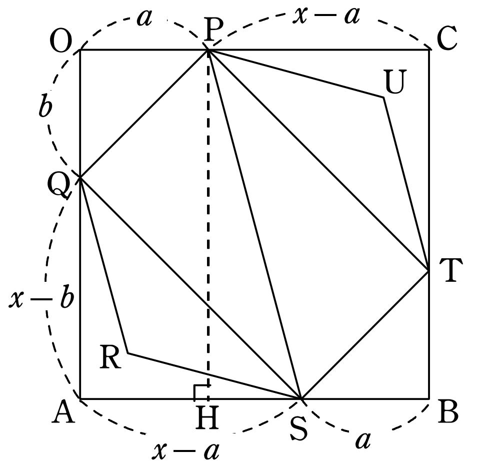
$(a-b)(a+b-x)=0$

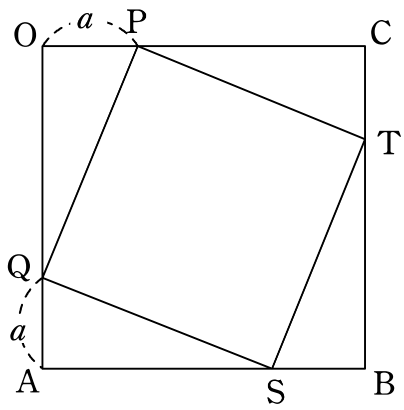
ここで，$a+b-x=0$ とすると $x-b=a$ となり，

右図のように長方形PQST が正方形となるが正六角形 PQRSTU

において四角形 QSTP が正方形となることはない。

よって， $a=b$ すなわち，OP＝OQ





(イ) (ア)より， OP＝OQ で， PQ＝1 なので， $OQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

△QRS において

∠QRS=120°，QR＝1 より

QS= $\sqrt{3}$

よって $QA=\dfrac{QS}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

ゆえに， $OA=OQ+QA=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(3)　右図のように点R，Sをとると，四角形PRQSは

　　$PS=1-p$，$RQ=1-q$，$PR=SQ=\sqrt{p^2+q^2-pq}$　の等脚台形。

点Pから RQ へ垂線 PH を下ろす。

$$PQ^2=PH^2+HQ^2$$

$$=PR^2-RH^2+HQ^2$$

$$=(p^2+q^2-pq)-\left(\frac{|(1-q)-(1-p)|}{2}\right)^2+\left(\frac{(1-p)+(1-q)}{2}\right)^2$$

$$=p^2+q^2-p-q+1$$

以上により

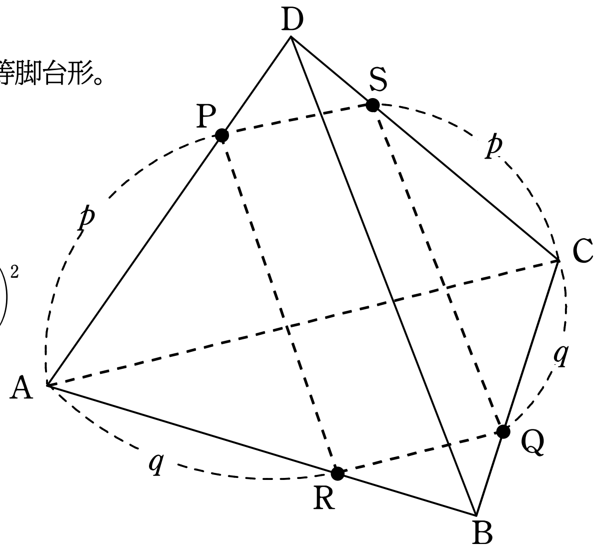
$$PQ=\sqrt{p^2+q^2-p-q+1}$$

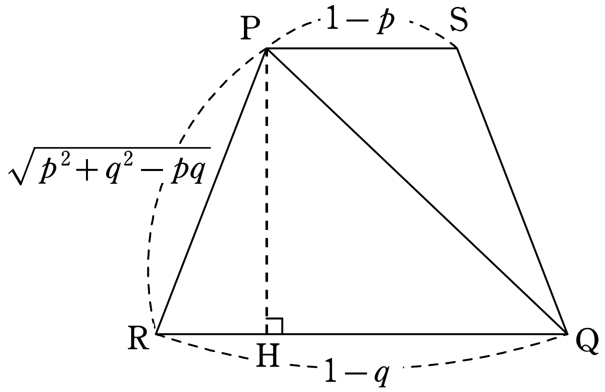
また，

$$p^2+q^2-p-q+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

であることから，

最小値は　$p=q=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$





(4)　4日間の計画として，次の (i)～(iv) の4つの場合が考えられる。

(i) 4箇所の観光地を訪れるとき，訪れる順番は ${}_4P_4$ 通り

　ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4P_4=24$ 通り

(ii) 3箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる3日間の選び方は ${}_4C_3$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_3$ 通り

　ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_3\times{}_4P_3=96$ 通り

(iii) 2箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる2日間の選び方は ${}_4C_2$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_2$ 通り

　ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_2\times{}_4P_2=72$ 通り

(iv) 1箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる1日間の選び方は ${}_4C_1$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_1$ 通り

　ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_1\times{}_4P_1=16$ 通り

以上 (i)～(iv) より，4日間の計画の立て方は $24+96+72+16=208$ 通り

2 求める領域は，図１の斜線部である。また，図１の斜線部の面積は，図２の斜線部から図３の斜線部を引いた面積である。

図１

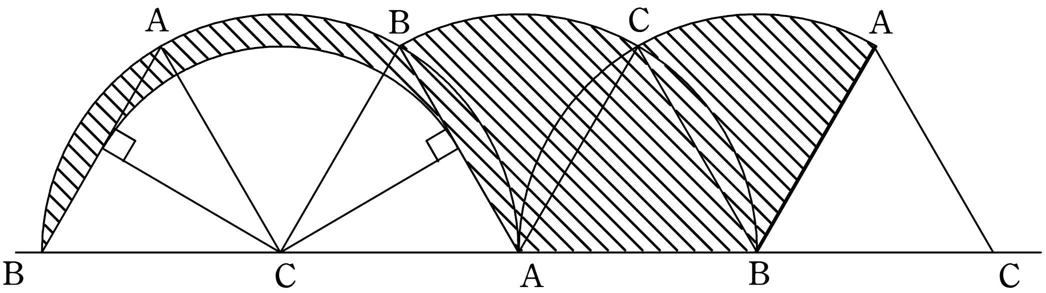


図２

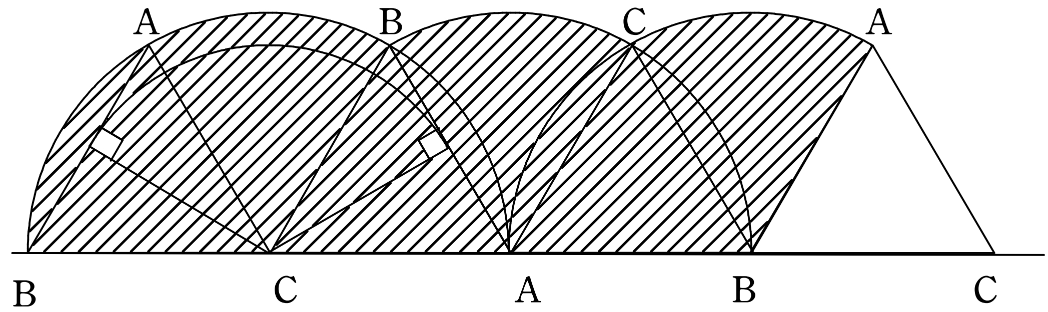
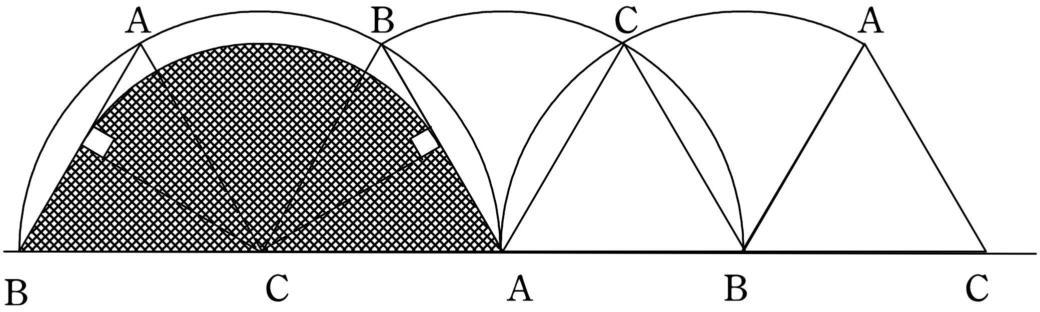
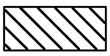
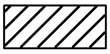
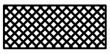


図３



∴（求める領域）＝ 

＝  － 

＝｛（半径１・中心角 60° の扇形）×４＋（一辺の長さが１の正三角形）×２｝

－｛（半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$・中心角 120° の扇形）＋（一辺の長さが１の正三角形）｝

$$= \left(\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}\times 4+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2\right)-\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$

$$= \frac{5}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{3}$ (1) Bさんが n 回目に黒板に書く整数を b_n とおく。

このとき，$b_n=3n+1$ である。

$2021^2=4084441$ より

$$b_n=3n+1=4084441$$

$$n=1361480$$

よって，Bさんが書く整数に 2021^2 が現れる。

(2) Aさんが n 回目に黒板に書く整数を a_n，Bさんが n 回目に黒板に書く整数を b_n とおく。

このとき，$a_n=3n-2$，$b_n=3n$ である。

ところで，自然数 m を法を3として考えると，

$$m\equiv 0,1,2 \pmod 3$$

$$m^2\equiv 0,1 \pmod 3$$

よって，自然数 m の平方を3で割った余りは0または1である。

a_n は3で割ったときの余りが1となるすべての自然数を表しており，また，b_n は3で割ったときの余りが0となるすべての自然数を表している。よって，どんな平方数もAさん，Bさんが書く整数 a_n，b_n に現れる。

$\boxed{4}$ (1) 辺BCの中点をMとすると重心G_1，G_2は線分AM，DMをそれぞれ2:1に内分し，$G_1G_2 /\!/ AD$が成立。

ゆえに、$G_1G_2=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{2}{3}$

(2) 各頂点を中心とする球の半径$1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$をR_1，各辺の中点と各面の重心を中心とする球の半径$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$をR_2とする。

$$AB=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=2R_1+2R_2$$

ゆえに，各頂点と各辺の中点を中心とする球同士は接していることがわかる。

$$G_1M=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}=2R_2$$

ゆえに，各辺の中点と各面の重心を中心とする球同士は接していることがわかる。

(1)の結果と，$AG_1=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$を利用すると

$$G_1G_2=\frac{2}{3}>2\times\frac{\sqrt{3}}{6}=2R_2$$

ゆえに，各面の重心を中心とする球同士が接することはない。

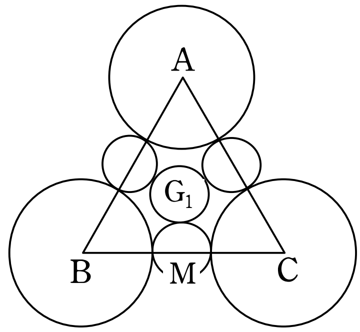
$$AG_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=R_1+R_2$$

$$AG_2>|AM-MG_2|=|AM-MG_1|=AG_1>R_1+R_2$$

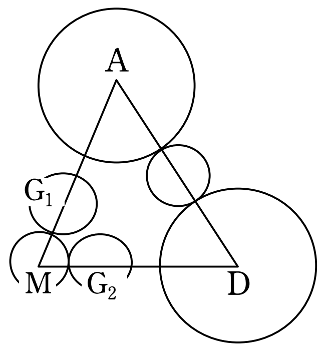
ゆえに，各頂点と各面の重心を中心とする球同士が接することはない。

以上の結果から，14個の球の位置関係は次のように考えることができる。

【参考】 平面ABCで切った断面図



平面AMDで切った断面図



14個の球の中心を「点」とし，接する球の中心を結んだ線分を「辺」とするグラフ（図1）を考える。

条件を満たす経路は，下図の辺で結ばれた点を移動する経路のうち，同じ点を2度通らないものを考えれば良い。

図1において，黒色の「点●」を「黒グループ」，白色の「点○」を「白グループ」とする。

このとき，辺で結ばれた2点は異なるグループに属することがわかる。

条件を満たし，全14個の点を移動する経路が存在すると仮定すると，

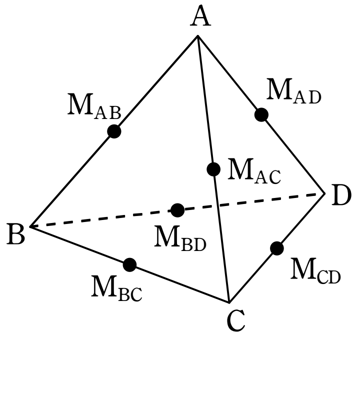
「黒グループ」の「点●」と「白グループ」の「点○」を交互に移動することから，

「点●」が7個と「点○」が7個を移動する経路が存在することになるが，「点○」は6個しかない。

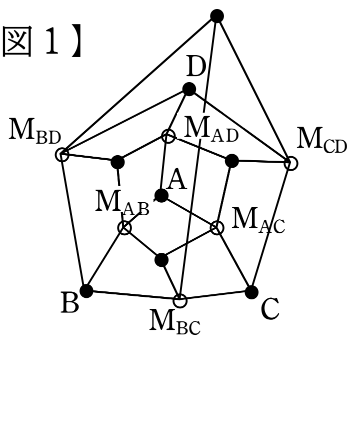
ゆえに，全14個の点を移動する経路は存在せず，求める球の個数が13個以下であることがわかる。

このとき，13個の点を移動する経路として，図2が存在する。

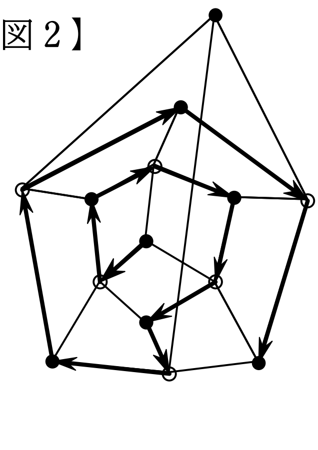
ゆえに，最大13個の球の内部を通ることができる。



【図1】



【図2】



$\boxed{5}$ 自然数Sの一の位を$k(S)$で表すこととする。

$P=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$ とすると $Q=10^4e+10^3d+10^2c+10b+a$ であり，

条件より自然数nを用いて $P=nQ$ と表せるので

$10^4a+10^3b+10^2c+10d+e=n(10^4e+10^3d+10^2c+10b+a)$

ただし，$1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$, $0\leqq c\leqq 9$, $0\leqq d\leqq 9$, $1\leqq e\leqq 9$, $2\leqq n\leqq 9$ である。

最高位の数について，繰り上がりを考慮すると $ne\leqq a<n(e+1)$ …… ① よって $ne\leqq 9$ …… ②

$2\leqq n\leqq 9$ より $e=1,2,3,4$ である。また $k(na)=e$ …… ③ である。

①，②，③から適する(a,e,n)の組は

(i) $e=4$ のとき $n=2$ なので $a=8,9$ となるが③に不適

(ii) $e=3$ のとき $n=2,3$ から

$n=2$ のとき $a=6,7$ となるが③に不適

$n=3$ のとき $a=9$ となるが③に不適

(iii) $e=2$ のとき $n=2,3,4$

$n=2$ のとき $a=4,5$ となるが③に不適

$n=3$ のとき $a=6,7,8$ となるが③に不適

$n=4$ のとき $a=8,9$ となり，③より $a=8$

(iv) $e=1$ のとき $1\leqq a\leqq 9$, $2\leqq n\leqq 9$ なので $na=21,81$

$na=21$ のとき $(n,a)=(3,7),(7,3)$ となるが①に不適

$na=81$ のとき $(n,a)=(9,9)$ となり，これは$a\geqq ne$ を満たす。

したがって(i)～(iv)より $(a,e,n)=(8,2,4),(9,1,9)$

$(a,e,n)=(8,2,4)$ のとき

$nQ=4(2\cdot 10^4+10^3d+10^2c+10b+8)=8\cdot 10^4+4\cdot 10^3d+4\cdot 10^2c+40b+32$

よって，十の位に注目すると$P=8\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+2$ より $k(4b+3)=d$ なのでdは奇数である。

したがって，千の位に注目すると，繰り上がりができないことから$d=1$ であり，またそのとき$4\leqq b$ なので

これらを満たすb,dの組は$(b,d)=(7,1)$ よって $P=nQ$ より $c=9$

$(a,e,n)=(9,1,9)$ のとき

$nQ=9(10^4+10^3d+10^2c+10b+9)=9\cdot 10^4+9\cdot 10^3d+9\cdot 10^2c+90b+81$

よって，十の位に注目すると$P=9\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+1$ より $k(9b+8)=d$

千の位に注目すると，繰り上がりができないことから$d=0,1$

これらを満たすb,dの組は$(b,d)=(8,0),(7,1)$ となるが，$(b,d)=(7,1)$ のとき $c=-\dfrac{27}{8}$ より不適

$(b,d)=(8,0)$ のとき $P=nQ$ より $c=9$

以上より，$P=87912,98901$

$\boxed{6}$　$n=6$ のときは，図１のように配置すると正方形の一辺が最小になる。
このとき，互いに接している円の中心を線分で結び
さらに正方形の辺に接する円とその接点を線分で結ぶと図２のようになる。
外側の正方形より一辺の長さが２だけ小さい正方形を考えると（図３），
この正方形の周上には５つの円の中心がある。
図３のように点Ａ，Ｂ，Ｃをとり，図４の部分だけ取り出して
考えると，$BC=\dfrac{2}{3}AC$　かつ　$AB=4$ であり，

さらに　$AC^2+BC^2=AB^2$　であるから　$AC=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

以上から，求める正方形の一辺の長さは $2+\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

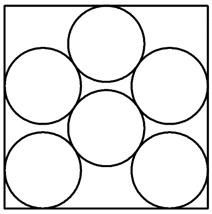


図１

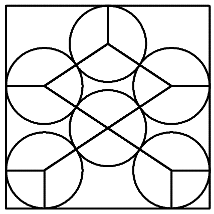


図２

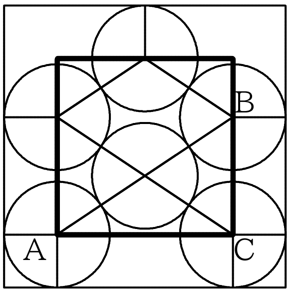


図３

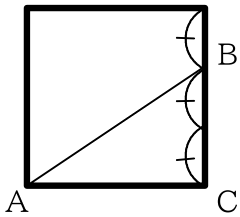


図４

$n=7$ のときは、図５のように配置すると正方形の一辺が最小になる。
このときの一辺の長さは，$n=6$ のときと同様にして $4+\sqrt{3}$ となる。

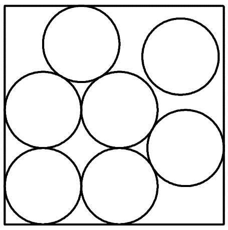


図５

$\boxed{7}$ (1) $12.34_{(8)} = 1\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0 + 3\cdot\dfrac{1}{8} + 4\cdot\dfrac{1}{8^2} = 8 + 2 + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{64} = \dfrac{167}{16} = 10.4375$

(2) $12.12_{(2.5)} = 1\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^1 + 2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^0 + 1\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)} + 2\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = 5.22$

(3) $x = 1.1111\cdots_{(2.6)}$ …① とおくと，

$2.6x = 11.1111\cdots_{(2.6)}$ …②

②−①より

$1.6x = 10_{(2.6)} = 2.6$

$\therefore\quad x = \dfrac{2.6}{1.6} = \dfrac{13}{8} = 1.625$

（無限級数を用いた場合）

$$1.1111\cdots_{(2.6)} = 1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^0 + 1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-1} + 1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-2} + 1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-3} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^k = \frac{1}{1-\dfrac{5}{13}} = \frac{13}{8} = 1.625$$

(4) $3_{(10)} = a_{-1}a_0.\,a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)}$ となるように，各桁の数字 $a_{-1}, a_0, a_1, \cdots$ を決定していく。

［手順1］ $1\times 2.5 < 3 < 2\times 2.5$ なので， $a_{-1} = 1$ とできる。

すると $a_0.\,a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)} = 3 - 2.5 = 0.5$

［手順2］ $0 < 0.5 < 1$ なので， $a_0 = 0$ とできる。

すると $0.\,a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)} = 0.5 - 0 = 0.5$

［手順3］ $1\times\dfrac{1}{2.5} < 0.5 < 2\times\dfrac{1}{2.5}$ なので， $a_1 = 1$ とできる。

すると $0.\,0a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)} = 0.5 - \dfrac{1}{2.5} = 0.1$

［手順4］ $0\times\dfrac{1}{2.5^2} < 0.1 < 1\times\dfrac{1}{2.5^2}$ なので， $a_2 = 0$ とできる。

すると $0.\,00a_3a_4\cdots_{(2.5)} = 0.1 - 0 = 0.1$

［手順5］ $1\times\dfrac{1}{2.5^3} < 0.1 < 2\times\dfrac{1}{2.5^3}$ なので， $a_3 = 1$ とできる。

すると $0.\,000a_4\cdots_{(2.5)} = 0.1 - \dfrac{1}{2.5^3} = 0.036$

同様に，小数第 4 位，5 位，… を，考えられる最大の数とすることによって

$3_{(10)} = 10.1011100001101210\cdots_{(2.5)}$ を得る。

また，常に考えられる最大の数をとらなくても，

例えば $a_1 = 0$ とすれば $3_{(10)} = 10.0222000101020202\cdots_{(2.5)}$ のような表示も考えられる。

$3_{(10)}$ をこの記数法で表す方法は，無数に存在する。

(5) この問題は解答を掲載しません。