ゼロからはじめる
時系列データ分析

大阪府×大阪府立大学　共催セミナー
2019年11月13日
立花　実

イントロダクション

時系列データとは？

時点を通じて観測されるデータ

（例）


日経平均株価
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
2000/1/3
2001/1/3
2002/1/3
2003/1/3
2004/1/3
2005/1/3
2006/1/3
2007/1/3
2008/1/3
2009/1/3
2010/1/3
2011/1/3
2012/1/3
2013/1/3
2014/1/3
2015/1/3
2016/1/3
2017/1/3
2018/1/3
2019/1/3

（例）

GDP（実質季節調整系列）
600
550
500
450
400
350
300
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019

本日は経済･ファイナンス分野における

時系列データの分析方法について解説

内容

（1）時系列データの分析に用いられる基礎的なモデルを解説

（2）自身の研究を紹介

さらに具体的な内容

1.（基礎） ARモデル

2.（基礎） VARモデル　　← 研究紹介（1つ）

3.（基礎） GARCHモデル

4.（発展） コピュラ　　← 研究紹介（2つ）

本日のメインメッセージ

“モデル”を分析に用いるとより多くのことが分かる！

モデルを使うことで具体的には
何が分かるようになるか（何ができるようになるか）？

- 予測 ← ARモデルで紹介
- データ間の詳細な関係 ← コピュラモデルで紹介
- 特に、因果関係 ← VARモデルで紹介
- 変数のボラティィリティー ← GARCHモデルで紹介

統計ソフトについて

・本日の例で使用した統計ソフト　・・・　R（およびRStudio）

・その他
Python（Rと同様、柔軟なプログラミングが可能）
gretl（操作が簡単）
Stata（経済系の人はよく使っている、ただし有料）
EViews（操作が簡単、ただし有料）
MATLAB（柔軟なプログラミングが可能、ただし有料）　などなど

⇒　分析目的・内容や自身の能力に応じて選択すればよいのでは

参考文献

・沖本竜義 『経済･ファイナンスデータの計量時系列分析』 朝倉書店
（時系列分析の理論をさらに学習したい人にお薦め）

・馬場真哉 『時系列分析と状態空間モデルの基礎：RとStanで学ぶ理論と実装』 プレアデス出版
（時系列分析の理論とRの使い方を同時に学びたい人にお薦め）

・福地純一郎･伊藤有希 『Rによる計量経済分析』 朝倉書店
（計量経済学（時系列分析を含む）の理論とRの使い方を
同時に学びたい人にお薦め）

本日紹介する自身の研究論文

・本多 佑三，黒木 祥弘，立花 実（2010）「量的緩和政策ー2001年から2006年にかけての日本の経験に基づく実証分析ー」フィナンシャル・レビュー，財務省財務総合政策研究所，平成22年（2010年）第1号（通巻第99号），pp.59-81.

・Minoru Tachibana (2018a) "Safe-haven and hedge currencies for the US, UK, and Euro area stock markets: A copula-based approach” Global Finance Journal, Vol. 35, pp.82-96.

・Minoru Tachibana (2018b) “Relationship between stock and currency markets conditional on the US stock returns: A vine copula approach" Journal of Multinational Financial Management, Vol. 46, pp.75-106.

1. ARモデル

経済･ファイナンス分野における時系列データの特徴①

“自己相関（系列相関）を持つ傾向がある”

AR(p)モデル（AutoRegressive model; 自己回帰モデル）

$$y_t = c + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \cdots + \emptyset_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

・y_t ・・・ t時点におけるデータ

・$c, \emptyset_1, \emptyset_2, \cdots, \emptyset_p$ ・・・ パラメータ

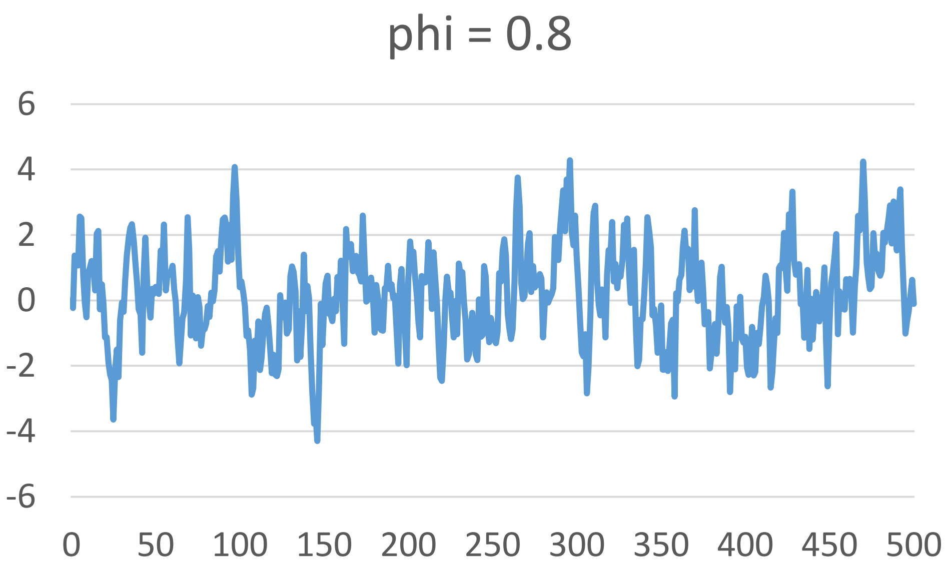
・ε_t ・・・ 撹乱項

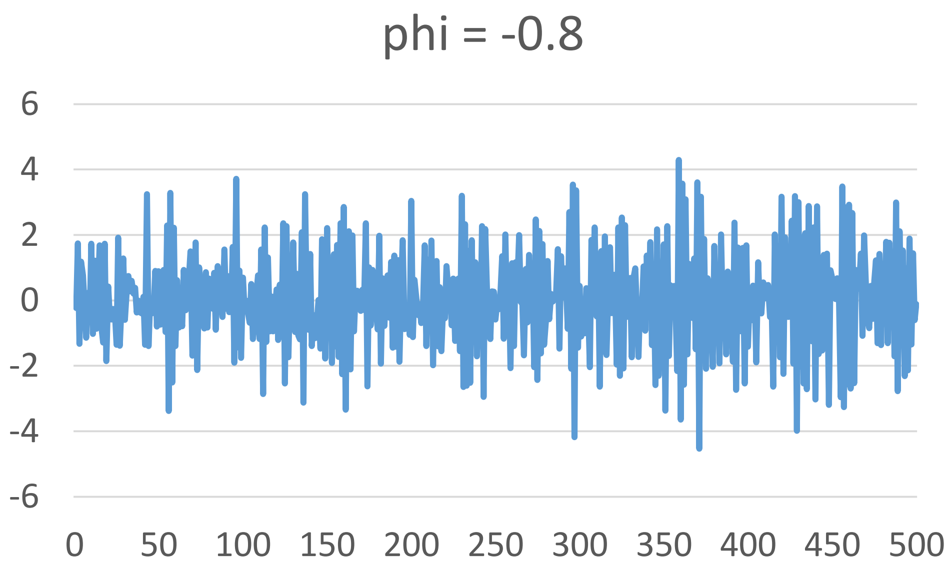
本日はAR(1)モデルに限定して説明

$$y_t = c + \emptyset y_{t-1} + \varepsilon_t$$

シミュレーションによるデータ発生

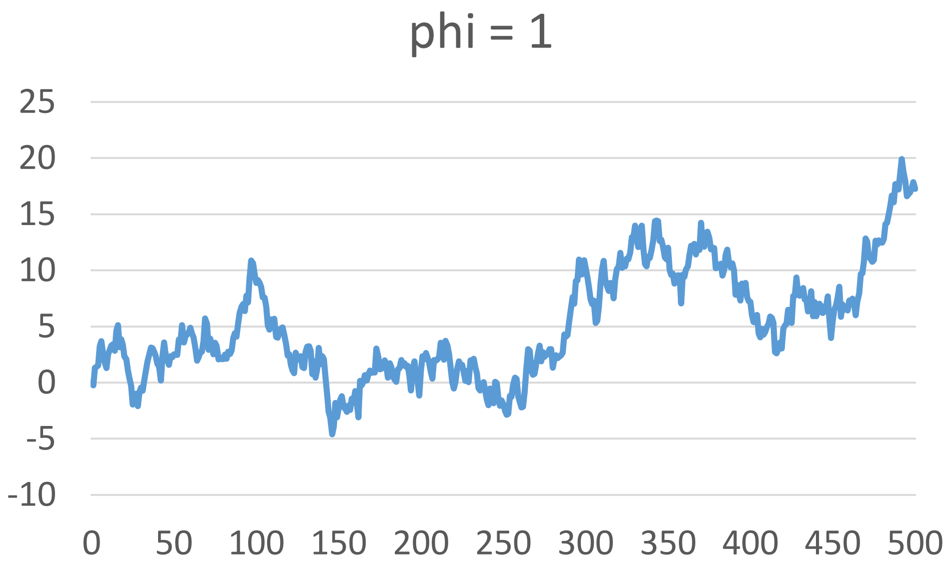
$$c = 0, \quad \emptyset = (0.8, -0.8, 1, 1.1)$$

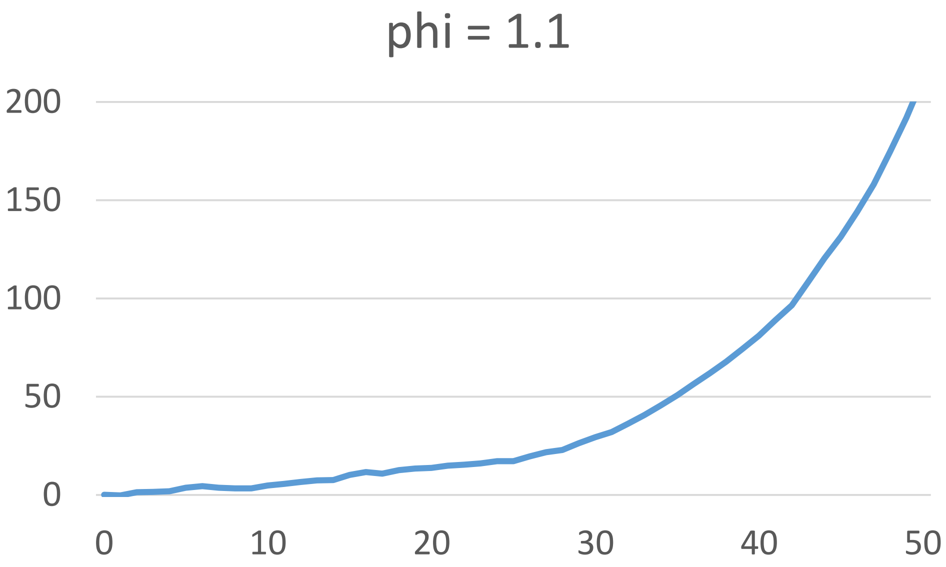




定常過程

定常過程





↑

非定常過程
（特に単位根過程）

↑

非定常過程

- $|\emptyset| < 1$ → 定常過程

- $\emptyset = 1$ → 非定常過程、特に単位根過程

- $|\emptyset| > 1$ → 非定常過程

データ分析のおおまかな手順

①データを用意

↓

②モデルのパラメータを推定
（本節ではAR(1)のパラメータ）

↓

③パラメータの推定値を使ってさらなる分析
（本節では予測）

統計ソフトで行う

実際のデータを用いて AR(1)モデルのパラメータを推定

日経平均株価: 2000年1月3日～2019年9月30日の日次データ

$$y_t = 14126.82 + 0.9992 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

(3058.75)　　(0.0006)

（括弧内は標準誤差）

⇒　単位根過程の疑い

（再掲）

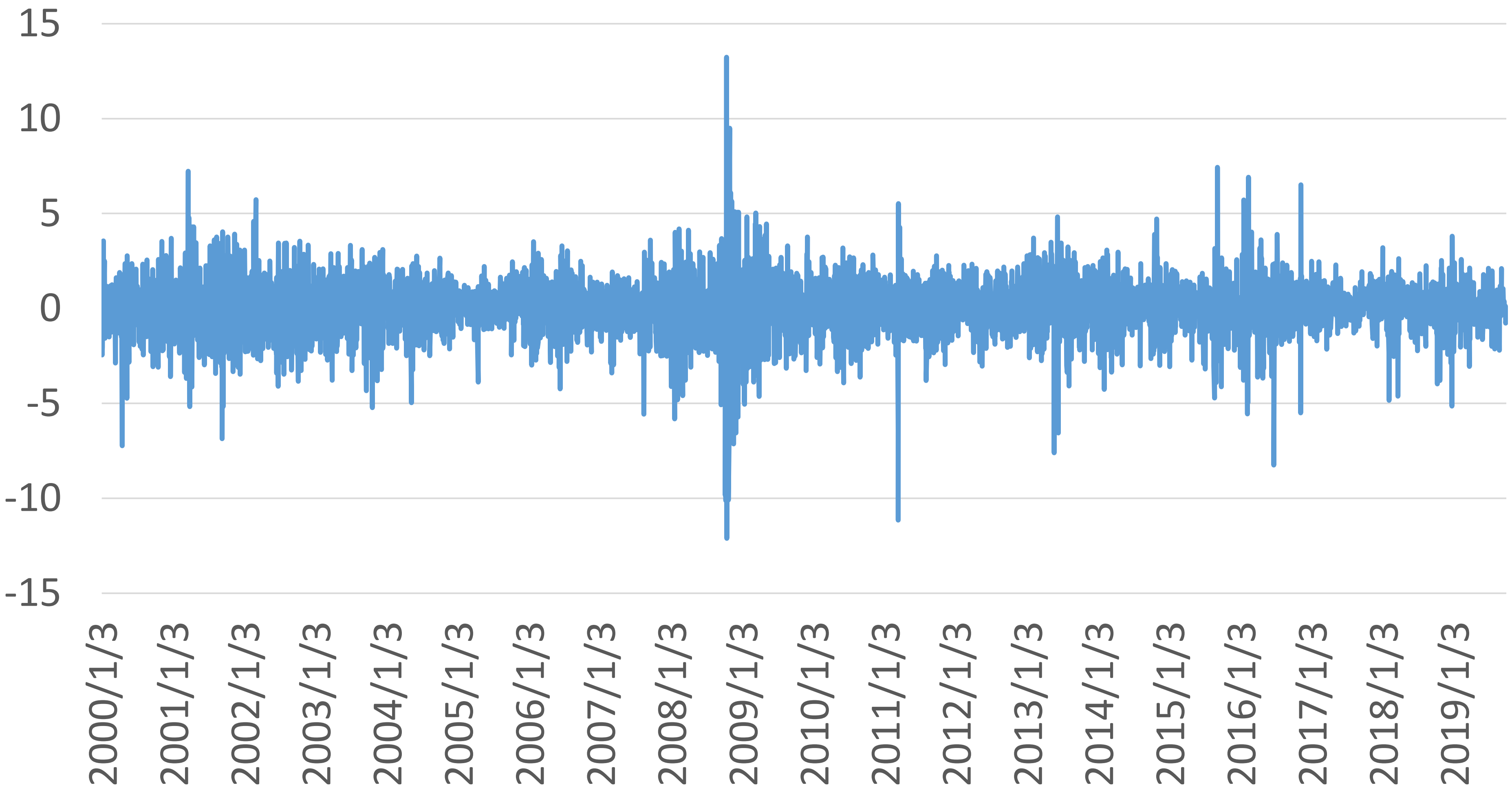
日経平均株価
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
2000/1/3
2001/1/3
2002/1/3
2003/1/3
2004/1/3
2005/1/3
2006/1/3
2007/1/3
2008/1/3
2009/1/3
2010/1/3
2011/1/3
2012/1/3
2013/1/3
2014/1/3
2015/1/3
2016/1/3
2017/1/3
2018/1/3
2019/1/3

次にデータを対数差分系列(≒変化率)に変換

$$\log(株価_t) - \log(株価_{t-1}) \approx \frac{株価_t - 株価_{t-1}}{株価_{t-1}}$$

（ここではさらに100をかけて単位を%とする）

日経平均株価（対数差分≒変化率）



対数差分系列を用いて
AR(1)モデルのパラメータを推定

$$y_t = 0.0027 - 0.0289 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

(0.0196)　(0.0139)

⇒　定常過程の条件満たす

予測

パラメータの推定値　＋　データ　⇒　h期先のyを予測

AR(1)モデル：　$y_t = c + \emptyset y_{t-1} + \varepsilon_t$

1期先：　$y_{t+1} = c + \emptyset y_t + \varepsilon_{t+1}$

∴ 1期先の点予測 $= c + \emptyset y_t$

AR(1)モデル：　$y_t = c + \emptyset y_{t-1} + \varepsilon_t$

2期先：　$y_{t+2} = c + \emptyset y_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$

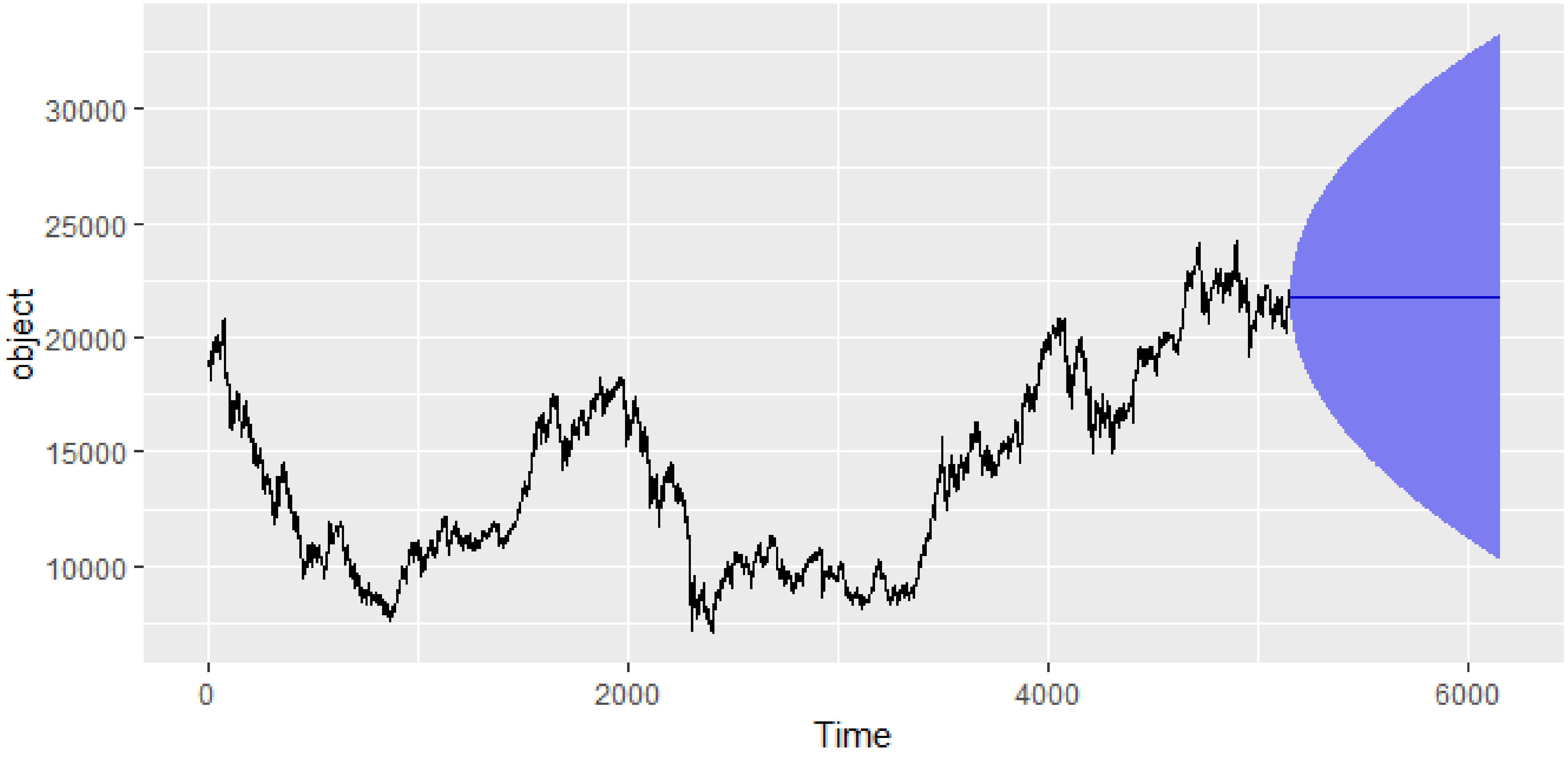
代入：　$$\begin{aligned} y_{t+2} &= c + \emptyset(c + \emptyset y_t + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+2} \\ &= c(1+\emptyset) + \emptyset^2 y_t + \emptyset\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \end{aligned}$$

∴ 2期先の点予測 $= c(1+\emptyset) + \emptyset^2 y_t$

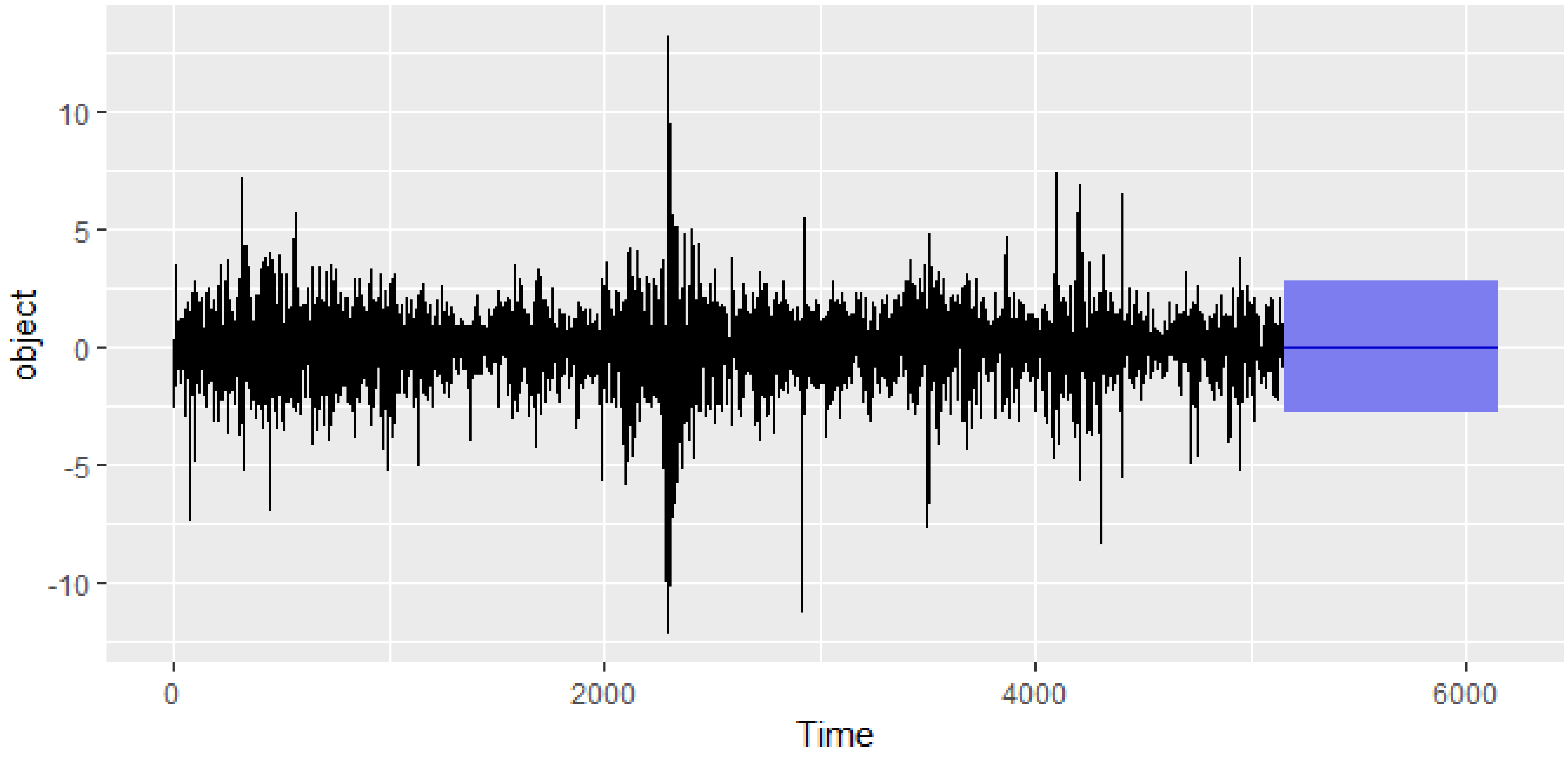
以下、h期先まで繰り返す。

さらに撹乱項に（正規分布のような）分布を仮定すると区間予測もできる。

日経平均株価の1000日先点予測と95%区間予測



日経平均株価(対数差分≒変化率)の1000日先点予測と95%区間予測



本日のメインメッセージ

“モデル”を分析に用いるとより多くのことが分かる！

2．VARモデル

経済・ファイナンス分野における時系列データの特徴②

“複数の変数が互いに影響しあっている”

n変量VAR(p)モデル
（Vector AutoRegressive model; ベクトル自己回帰モデル）

$$Y_t = C + \Phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \Phi_p Y_{t-p} + \mathrm{E}_t$$

- $Y_t = (y_{1t}, \cdots, y_{nt})'$
- $C = (c_1, \cdots, c_n)'$
- $\Phi_j : n \times n$の行列
- $\mathrm{E}_t = (\varepsilon_{1t}, \cdots, \varepsilon_{nt})'$

（例）2変量VAR(1)モデル

$$y_{1t} = c_1 + \emptyset_{11} y_{1,t-1} + \emptyset_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = c_2 + \emptyset_{21} y_{1,t-1} + \emptyset_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

データ分析のおおまかな手順

①データを用意

↓

②モデルのパラメータを推定
（本節では2変量VAR(1)のパラメータ）

↓

③パラメータの推定値を使ってさらなる分析
（本節ではインパルス応答関数）

統計ソフトで行う

実際のデータを用いて
2変量VAR(1)モデルのパラメータを推定

- y_1　：日経平均株価の対数差分
- y_2　：米国の株価指数（S&P500）の対数差分

▪期間　：2000年1月3日～2019年9月30日の日次データ

$$y_{1t} = -0.005 - 0.091 y_{1,t-1} + 0.602 y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

(0.018) (0.012) (0.015)

$$y_{2t} = 0.016 - 0.015 y_{1,t-1} - 0.072 y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

(0.016) (0.011) (0.014)

推定されたパラメータを使ってさらなる分析

“インパルス応答関数”

（非直交化）インパルス応答関数

ε_{jt}が1単位増加したときの$y_{i,t+k}$の変化をkの関数としてみたものを、“y_jのショックに対するy_iの（非直交化）インパルス応答関数”という。

（例）2変量VAR(1)モデル

$$\begin{cases} y_{1t} = c_1 + \emptyset_{11} y_{1,t-1} + \emptyset_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = c_2 + \emptyset_{21} y_{1,t-1} + \emptyset_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

“y_1のショックに対するy_1とy_2の（非直交化）インパルス応答関数”

（それぞれ$IRF_{11}(k), IRF_{21}(k)$と表記）

（$k = 0$のとき）

$$IRF_{11}(0) = \frac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{1t}} = 1$$

$$IRF_{21}(0) = \frac{\partial y_{2t}}{\partial \varepsilon_{1t}} = 0$$

（$k=1$のとき）

1期先の
2変量VAR（1）

$$\begin{cases} y_{1,t+1} = c_1 + \emptyset_{11} y_{1t} + \emptyset_{12} y_{2t} + \varepsilon_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} = c_2 + \emptyset_{21} y_{1t} + \emptyset_{22} y_{2t} + \varepsilon_{2,t+1} \end{cases}$$

より

$$\color{red}{IRF_{11}(1)} = \frac{\partial y_{1,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{11} \frac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{1t}} + \emptyset_{12} \frac{\partial y_{2t}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{11} \times 1 + \emptyset_{12} \times 0 = \color{red}{\emptyset_{11}}$$

$$\color{red}{IRF_{21}(1)} = \frac{\partial y_{2,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{21} \frac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{1t}} + \emptyset_{22} \frac{\partial y_{2t}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{21} \times 1 + \emptyset_{22} \times 0 = \color{red}{\emptyset_{21}}$$

（$k=2$のとき）

2期先の
2変量VAR（1）

$$\begin{cases} y_{1,t+2} = c_1 + \emptyset_{11} y_{1,t+1} + \emptyset_{12} y_{2,t+1} + \varepsilon_{1,t+2} \\ y_{2,t+2} = c_2 + \emptyset_{21} y_{1,t+1} + \emptyset_{22} y_{2,t+1} + \varepsilon_{2,t+2} \end{cases}$$

より

$$IRF_{11}(2) = \frac{\partial y_{1,t+2}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{11} \frac{\partial y_{1,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}} + \emptyset_{12} \frac{\partial y_{2,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}}$$

$$= \emptyset_{11} \times \emptyset_{11} + \emptyset_{12} \times \emptyset_{21}$$

$$IRF_{21}(1) = \frac{\partial y_{2,t+2}}{\partial \varepsilon_{1t}} = \emptyset_{21} \frac{\partial y_{1,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}} + \emptyset_{22} \frac{\partial y_{2,t+1}}{\partial \varepsilon_{1t}}$$

$$= \emptyset_{21} \times \emptyset_{11} + \emptyset_{22} \times \emptyset_{21}$$

以下、同様に$k = 3,4 \cdots$と繰り返すと、すべてのk に対し（非直交化）インパルス応答関数が求められる。

さらに、ショックを“直交化”する必要あり。（ここでは説明を省略）

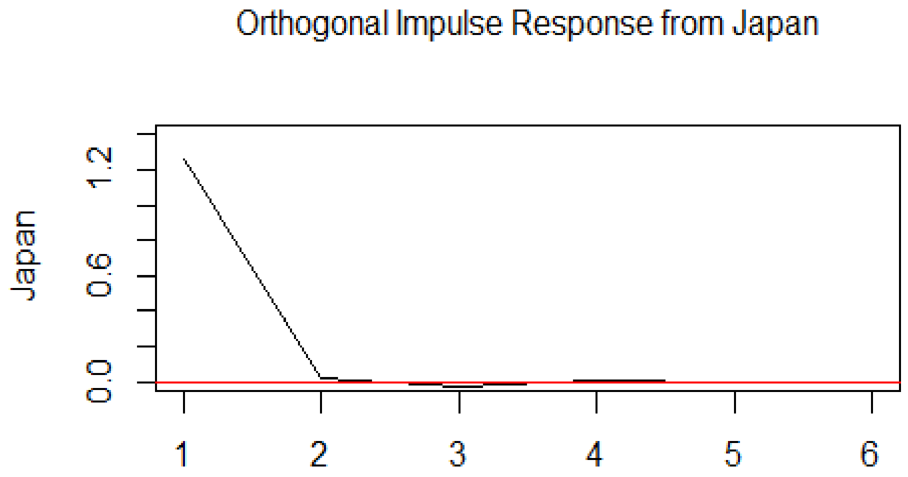
実際のデータを用いて（直交化）インパルス応答関数を求める

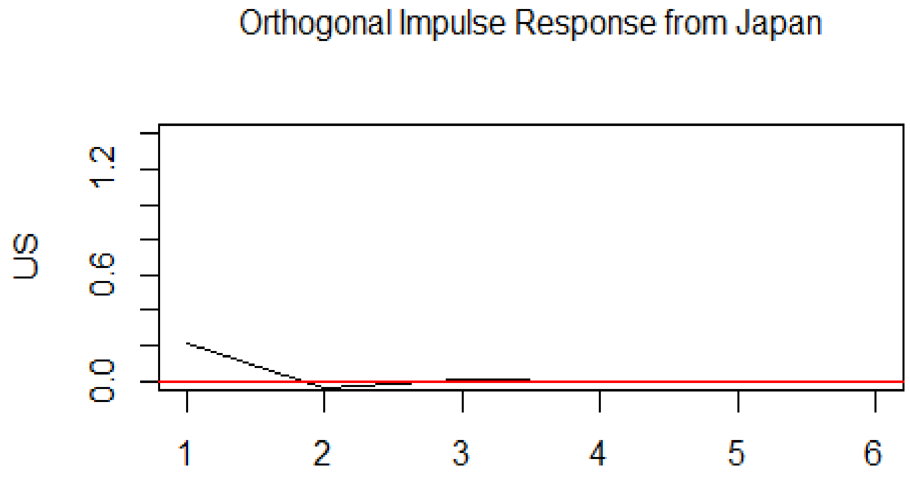
先ほどの

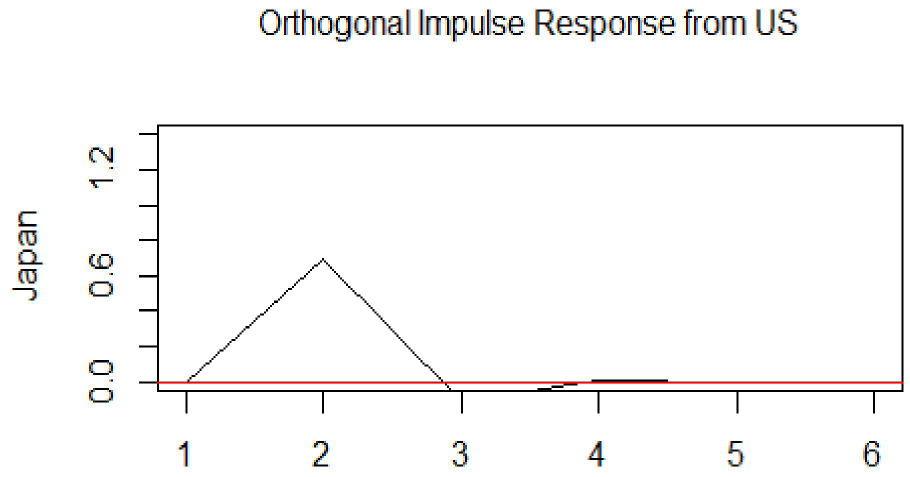
・日経平均株価の対数差分

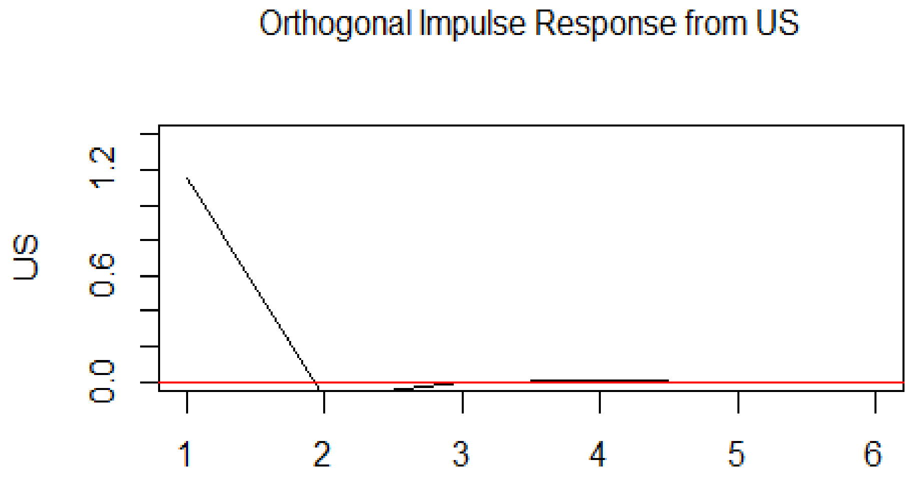
・米国の株価指数（S&P500）の対数差分

からなる2変量VAR(1)モデルの推定結果を使うと･･･


Orthogonal Impulse Response from Japan
Japan
0.0
0.6
1.2
1
2
3
4
5
6


Orthogonal Impulse Response from Japan
US
0.0
0.6
1.2
1
2
3
4
5
6


Orthogonal Impulse Response from US
Japan
0.0
0.6
1.2
1
2
3
4
5
6


Orthogonal Impulse Response from US
US
0.0
0.6
1.2
1
2
3
4
5
6

自身の研究紹介①

本多･黒木･立花（2010）

2001年～2006年に日銀が実施した量的緩和策の効果を測定

- 推定期間：2001年3月～2006年2月（月次データ）
- モデル：4変量VAR(2)

＜変数＞

生産を表す変数：鉱工業生産指数（IIP）

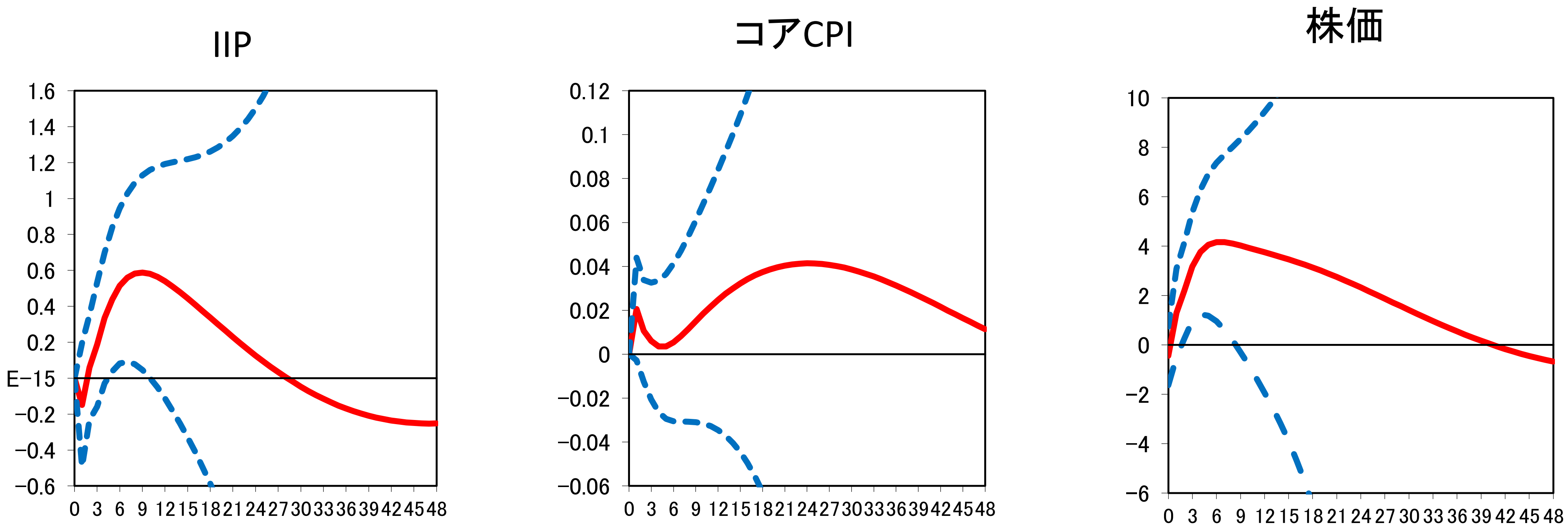
物価を表す変数：（生鮮食品除く）消費者物価指数（コアCPI）

金融政策を表す変数：日銀当座預金残高の目標値

政策効果の媒介となる変数：日経平均株価

それぞれ対数値（100×log(x)）に変換

量的緩和ショックに対するインパルス応答関数



(1) 量的緩和策は株価上昇を通じて生産量(実体経済)に有意な影響を与えた。

(2) しかし、物価に対しては有意な効果は持たなかった。

本日のメインメッセージ

“モデル”を分析に用いるとより多くのことが分かる！

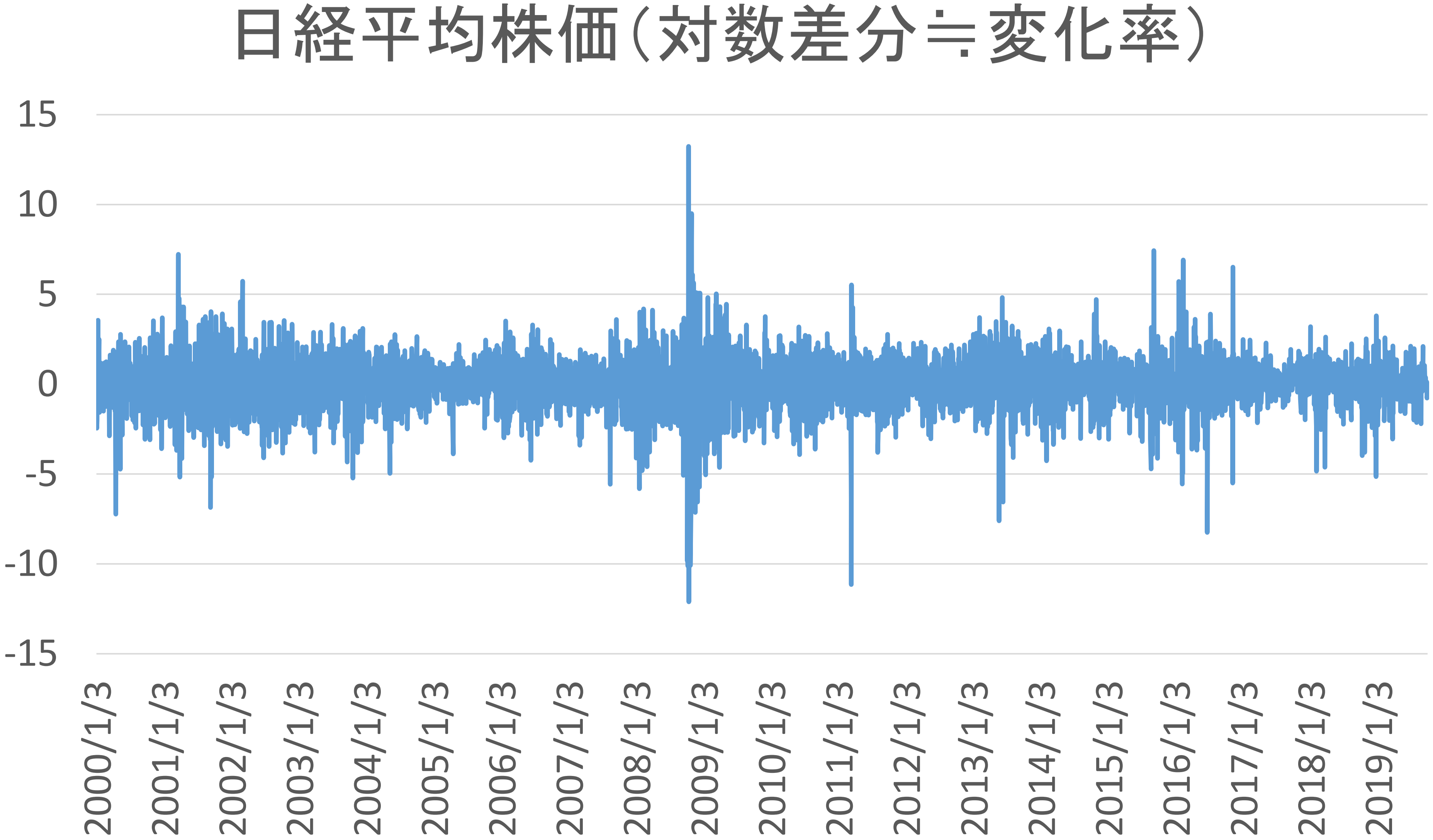
3．GARCHモデル

経済・ファイナンス分野における時系列データの特徴③

“ボラティリティーが変動する”

（特にファイナンスデータにこの特徴がみられる）

（再掲）


日経平均株価（対数差分≒変化率）
15
10
5
0
-5
-10
-15
2000/1/3
2001/1/3
2002/1/3
2003/1/3
2004/1/3
2005/1/3
2006/1/3
2007/1/3
2008/1/3
2009/1/3
2010/1/3
2011/1/3
2012/1/3
2013/1/3
2014/1/3
2015/1/3
2016/1/3
2017/1/3
2018/1/3
2019/1/3

➢ 条件付き期待値のモデル: $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$$= \mu_t + \sigma_t \times v_t$$

➢ 条件付き分散のモデル ＝ "GARCH(r,m)モデル"
（Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity model）:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_r \sigma_{t-r}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

特にGARCH(1,1)モデル:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

データ分析のおおまかな手順

①データを用意

↓

②モデルのパラメータを推定
（本節ではGARCH(1,1)のパラメータ）

↓

③パラメータの推定値を使ってさらなる分析
（本節ではボラティリティーの計算）

統計ソフトで行う

実際のデータを用いて GARCH(1,1)モデルのパラメータを推定

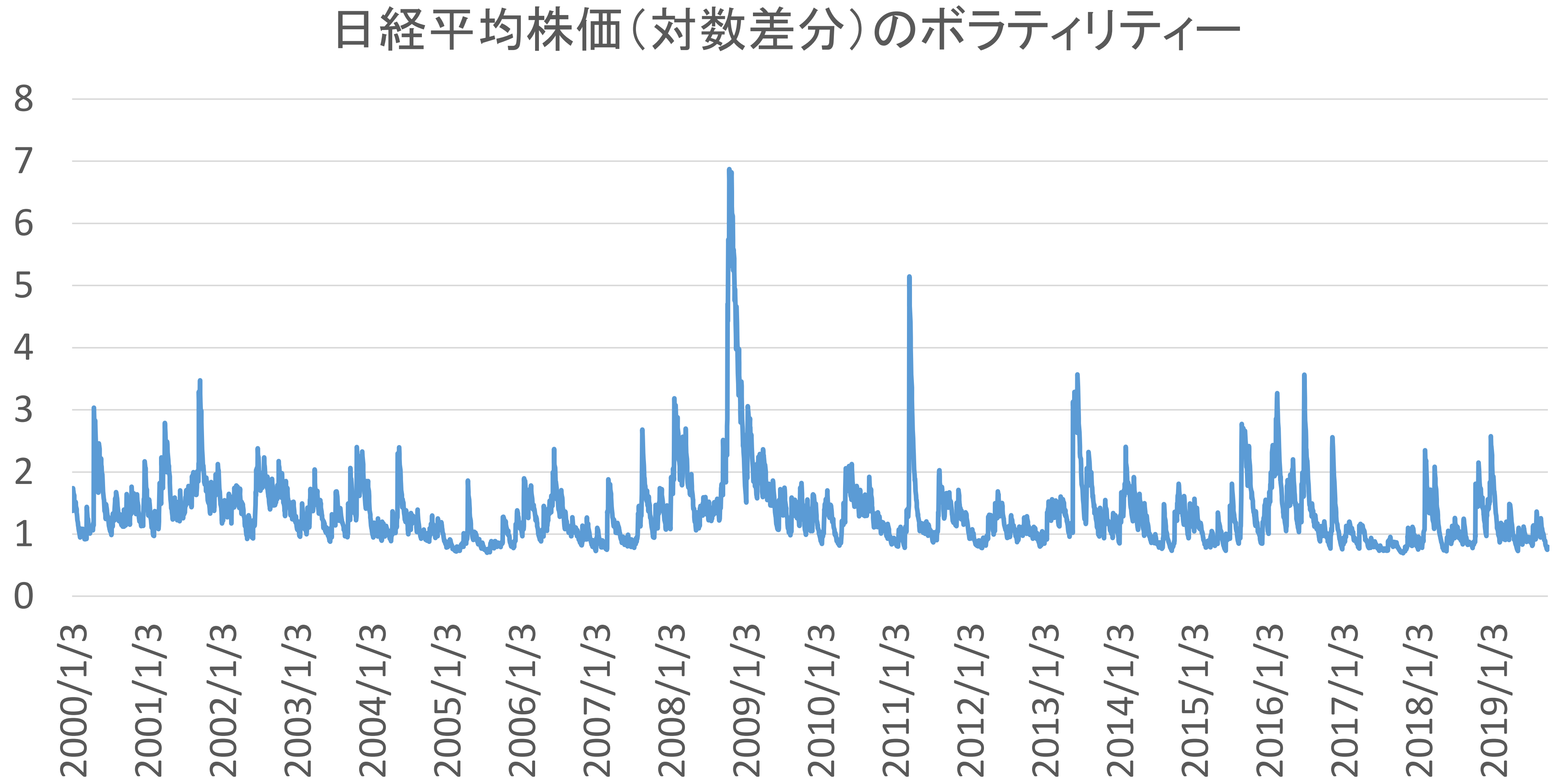
日経平均株価の対数差分

$$\underset{}{\sigma_t^2} = \underset{(0.007)}{0.039} + \underset{(0.009)}{0.885}\sigma_{t-1}^2 + \underset{(0.008)}{0.099}\varepsilon_{t-1}^2$$

さらにレバレッジ効果を加味（最後の項）

$$\sigma_t^2 = \underset{(0.007)}{0.050} + \underset{(0.009)}{0.880}\sigma_{t-1}^2 + \underset{(0.007)}{0.036}\varepsilon_{t-1}^2 + \underset{(0.014)}{0.116}\varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} < 0)$$

ボラティリティー(σ_t)の計算(レバレッジ効果付きの式を用いて)



本日のメインメッセージ

“モデル”を分析に用いるとより多くのことが分かる！

4．コピュラ

（発展的なモデルの一つ）

経済・ファイナンス分野における時系列データの特徴④

“変数間に非対称的な関係がある可能性”

＆

“変数間にテイル依存関係がある可能性”

（特にファイナンスデータ間にこのような傾向がみられる）

スクラーの定理

$$F(x_1,\cdots x_n) = C\big(F_1(x_1),\cdots F_n(x_n)\big)$$

- x_i ：確率変数
- $F(x_1,\cdots x_n)$: 同時分布
- $F_i(x_i)$: 周辺分布
- C : コピュラ

各変数における
周辺分布のモデル

＋

コピュラ

⇒

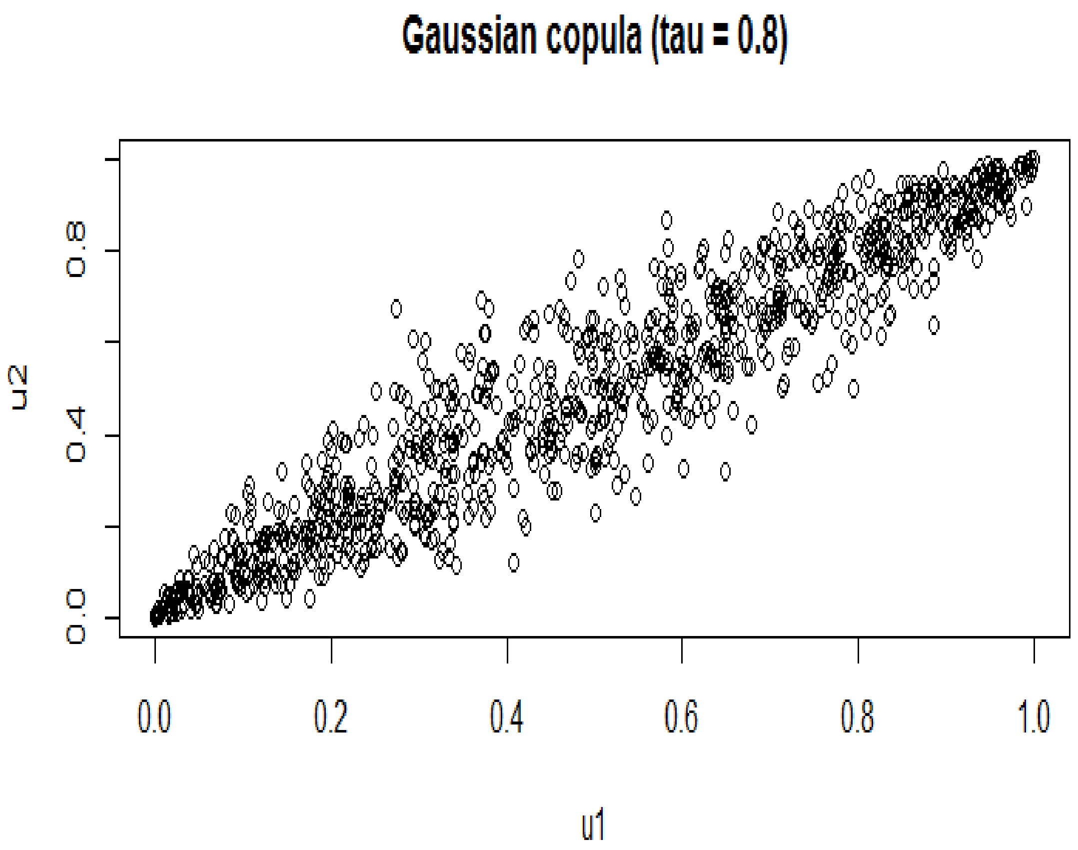
同時分布

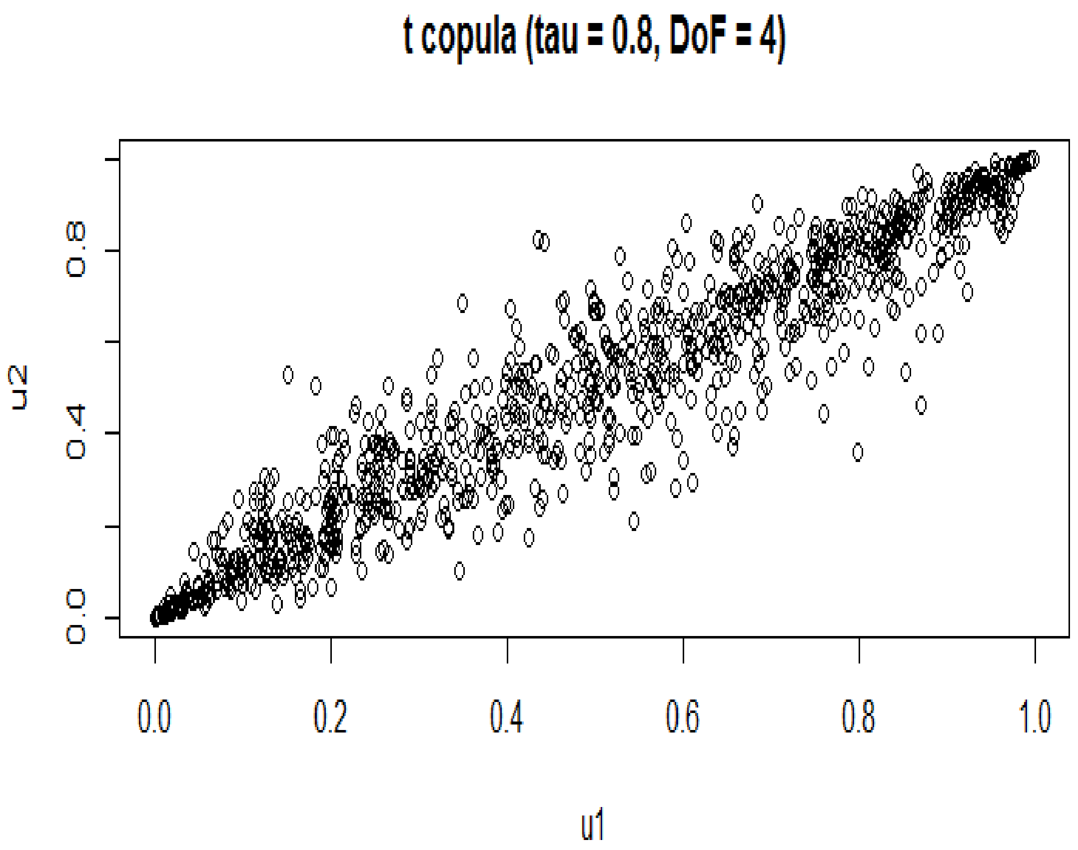
例えばAR-GARCHモデル

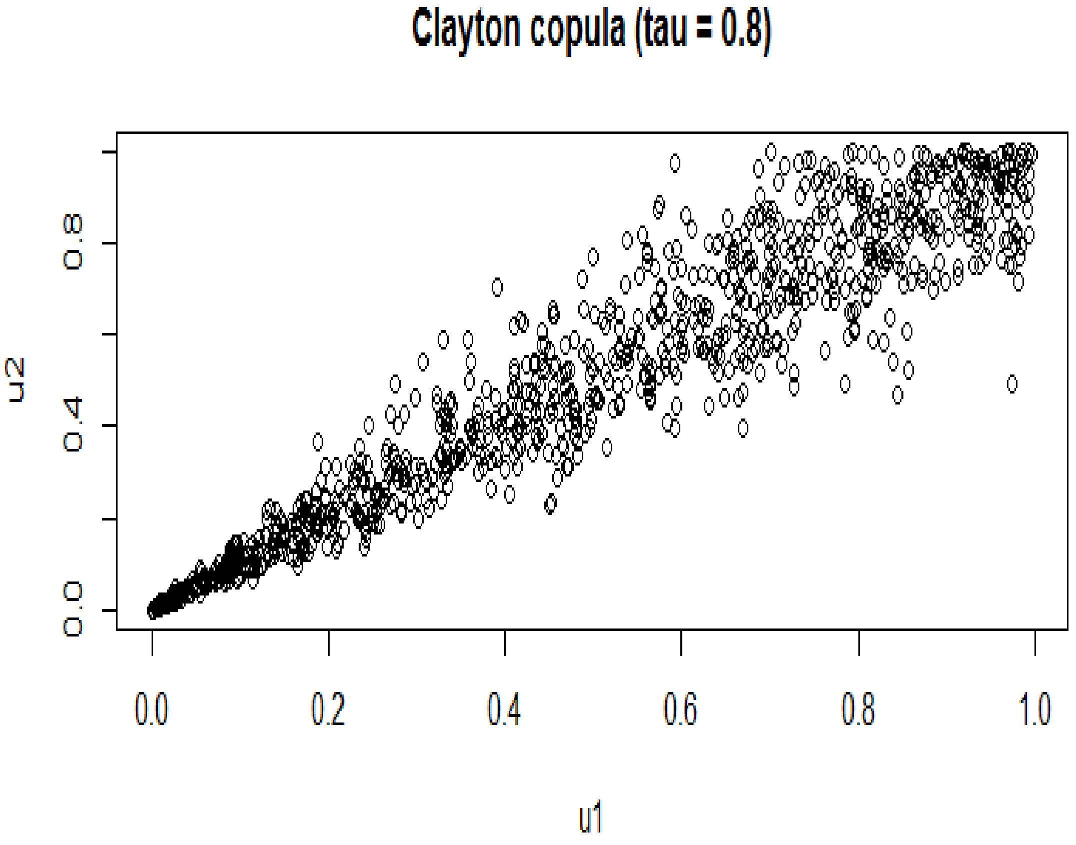
変数間の関係を表す。
様々なコピュラが開発されている。
Gaussian / t / Clayton/
Gumbel / BB7　など

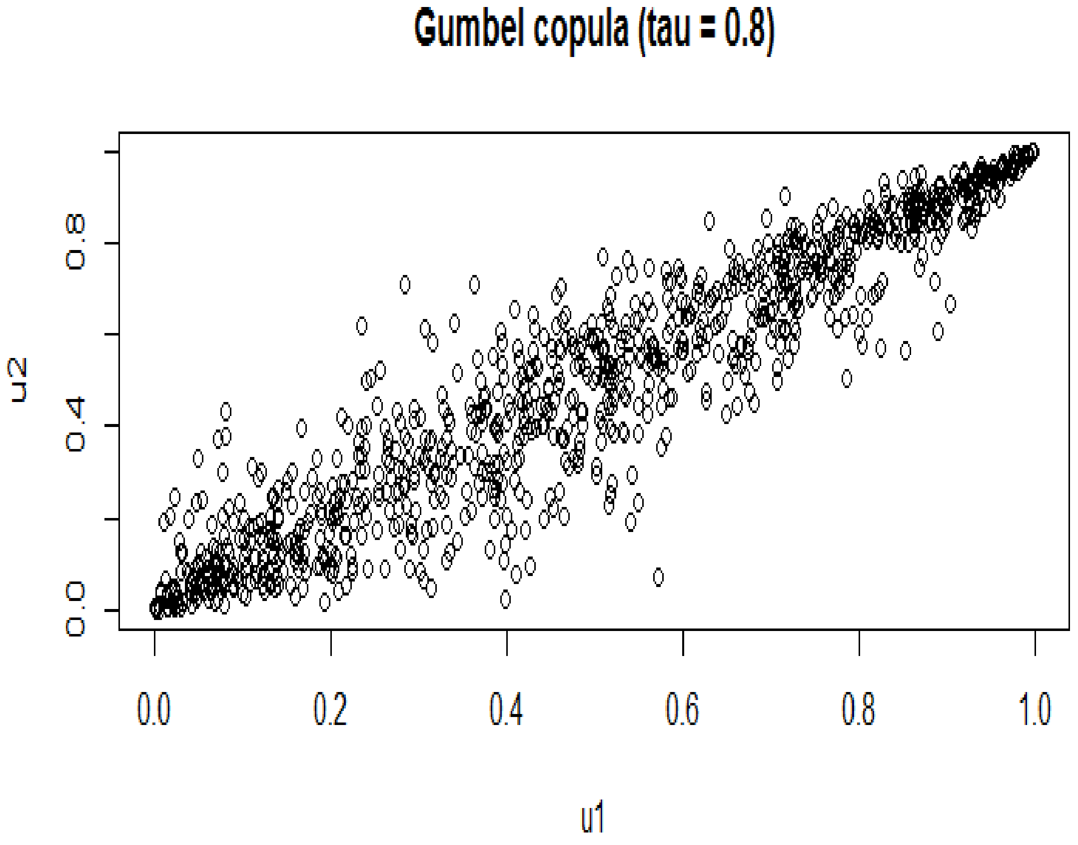
各変数の周辺分布とコピュラを組み合わせることで、複雑な形の同時分布を柔軟に構築することができる。

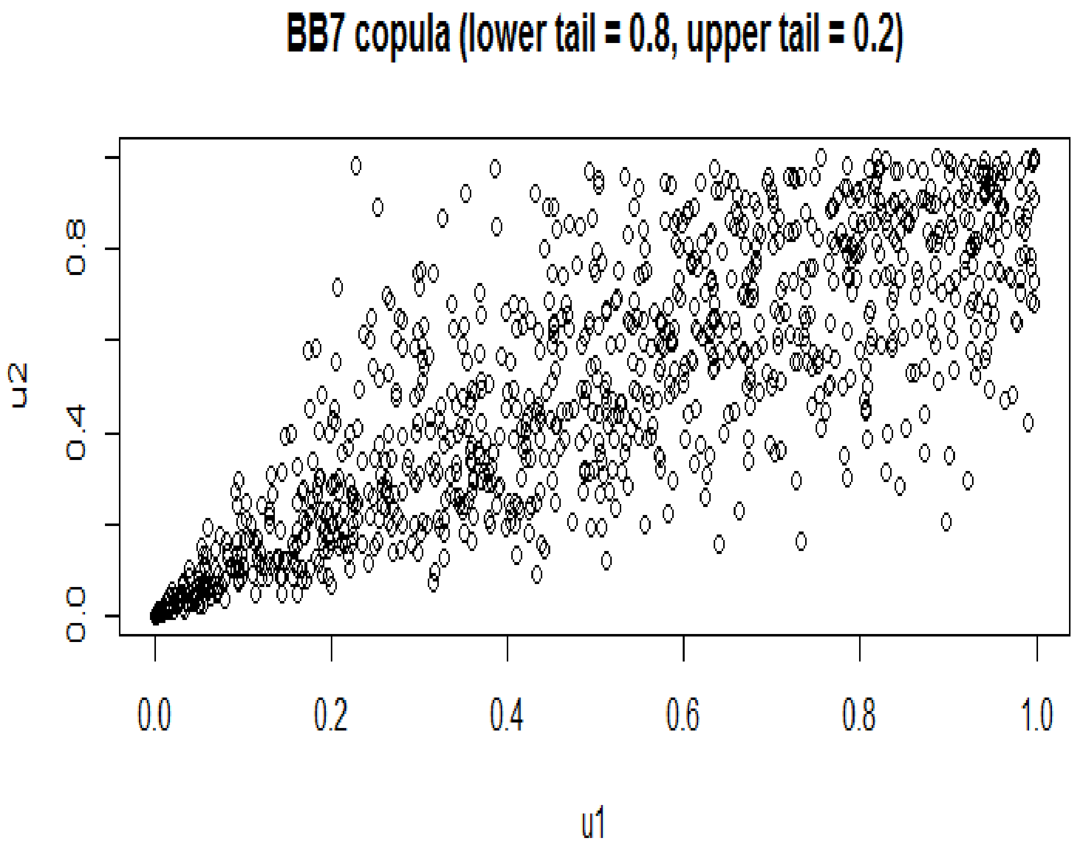
シミュレーションによるデータ発生：いくつかの2変量コピュラから

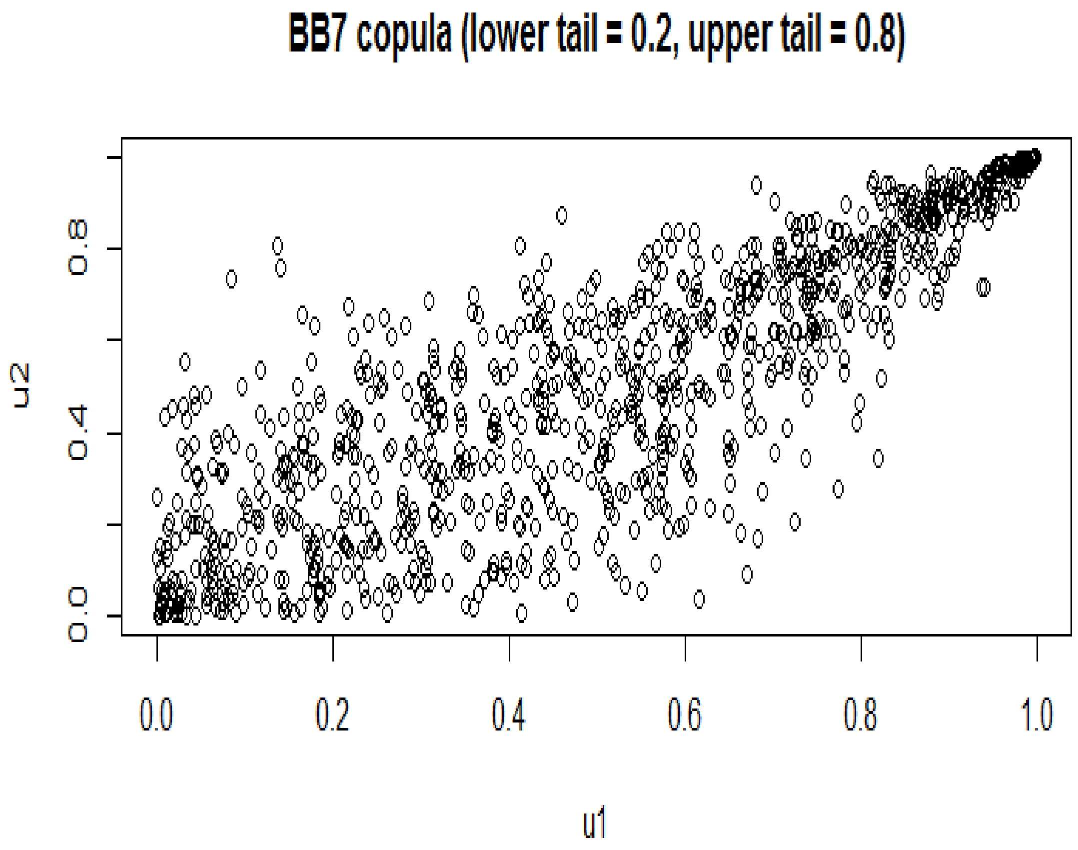





Clayton copula (tau = 0.8)
u2
0.0
0.4
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
u1


Gumbel copula (tau = 0.8)
u2
0.0
0.4
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
u1


BB7 copula (lower tail = 0.8, upper tail = 0.2)
u2
0.0
0.4
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
u1


BB7 copula (lower tail = 0.2, upper tail = 0.8)
u2
0.0
0.4
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
u1

自身の研究紹介②

Tachibana（2018a）

コピュラの応用：ヘッジ通貨と避難通貨を特定

■ 定義

・ヘッジ通貨：株式リターンに対して、通常時に負の関係となる通貨

・避難通貨：株式リターンに対して、異常時に負の関係となる通貨

■ 貢献

(1) コピュラモデリングに基づいて、ヘッジ通貨と避難通貨を特定する方法を提案。

(2) ヘッジ通貨や避難通貨は、株式市場ごとに／時期ごとに異なることを示す。

■ モデル：2変量コピュラ（株式リターン ／ 通貨リターン）

■ データ

・3株式市場（米国、英国、ユーロ圏）のリターン

・5通貨（米ドル、英ポンド、欧ユーロ、日本円、スイスフラン）のリターン

■ 標本期間：1999年1月8日～2016年12月30日（週次データ）

さらに全標本期間を、グローバル金融危機前（1999.1～2007.7）、グローバル金融危機時（2007.8～2012.12）、グローバル金融危機後（2013.1～2016.12）に3分割して推定した。

■ 結果

	米国株式市場	英国株式市場	ユーロ圏株式市場
（1999～2007） 避難通貨 ヘッジ通貨	ー ー	ー スイスフラン	スイスフラン スイスフラン
（2007～2012） 避難通貨 ヘッジ通貨	日本円 日本円	ー 米ドル／スイスフラン／日本円	米ドル 米ドル／スイスフラン／日本円
（2013～2016） 避難通貨 ヘッジ通貨	日本円 スイスフラン／日本円	ー スイスフラン／日本円	ー スイスフラン／日本円

自身の研究紹介③

Tachibana（2018b）

（ヴァイン）コピュラの応用:

株式市場と自国通貨の関係:国際金融市場の連動性を考慮

■ 仮説

・“International-trading model”

ある国の株式リターンと通貨リターン：輸出国は負の関係

輸入国は正の関係

・“Portfolio-balance model“

株式リターンと通貨リターンは正の関係

■　貢献

株式市場の国際的な連動性を考慮した上で、自国の株式市場と自国通貨の関係をコピュラを用いて推定した。（既存研究のように国際的な連動性を考慮しない場合、正のバイアスが生じると予想される。）

■ 手法

・海外株式市場の代理変数として米国の株価データを用いる

・3変数からなる“ヴァイン・コピュラ”を推定

（自国株式リターン ／ 自国通貨リターン／米国株式リターン）

■ 対象：21ヵ国・地域

■ 標本期間：2003年5月2日～2017年9月29日（週次データ）

■ 結果

（1）国際的な株式市場の連動性を考慮せずに自国の株式リターンと通貨リターンの関係を推定すると、事前の予想通り、正のバイアスが生じてしまうことが分かった。（ただし、バイアスの値自体はそれほど大きくはなかった。）

（2）特に金融危機時にそのバイアスが大きくなる傾向がみられた。

（3）自国の株式リターンと通貨リターンの関係は、概ね、先進国は負の関係（International-trading modelと整合的）、新興国は正の関係（Portfolio-balance modelと整合的）であるという結果が得られた。