受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

支援学校高等部　数学　解答用紙 （４枚のうち１）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

3

得点	

（1）

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，

$\sqrt{2}=\frac{q}{p}\ldots$①　と表すことができる。ただし，$p$，$q$ は互いに素である正の整数。

①の両辺を２乗して整理すると，

$2p^2=q^2$ …②

②より，q^2 は偶数であるので，q も偶数である。

よって，q は，正の整数 k を用いて，$q=2k$ と表すことができる。

これを②に代入すると，

$2p^2=(2k)^2$

すなわち，$p^2=2k^2$ …③

③より，p^2 は偶数であるので，p も偶数である。

以上より，p,q はともに偶数となり，互いに素である正の整数であることに矛盾する。

よって，$\sqrt{2}$は有理数でない。

すなわち，$\sqrt{2}$は無理数である。

（2）

$\mathrm{P}(s,t),\mathrm{G}(x,y)$とする。点 P は円周上の点なので，$(s-2)^2+(t-1)^2=16$ …①

ここで，3 点 A，B，P で三角形を作るときの条件は，3 点が一直線上にないことである。

よって，$s\neq 0$ …②

3 点 A，B，P が三角形を作るとき，点 G は△ABP の重心なので，

$x=\frac{0+0+s}{3}$，$y=\frac{5+(-5)+t}{3}$　整理して，$s=3x$，$t=3y$

これを①に代入すると，$(3x-2)^2+(3y-1)^2=16$

よって，$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\ldots$④

また，②より，$x\neq 0$ なので，④より，$x=0$ のとき，$y=\frac{1\pm 2\sqrt{3}}{3}$

△ABP の重心 G の軌跡は，点$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円である。

ただし，点$\left(0,\ \frac{1\pm 2\sqrt{3}}{3}\right)$をのぞく。

受験番号	

支援学校高等部　数学　解答用紙 （4 枚のうち 2）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

3 （続き）

(3)

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ について，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解が

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であることを用いて，

$$a_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right)\cdots①$$

$$a_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)\cdots②$$

と表すことができる。

①より，数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$ は，公比が $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり，初項は

$$a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

よって，$a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots③$

②より，　数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$ は，　公比が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり，初項は

$$a_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，　$a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots④$

④－③により，a_{n+1} を消去して，

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

よって，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

支援学校高等部　数学　解答用紙　（4 枚のうち 3）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4

得点	

（1）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}\times\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\quad -x}{h\left\{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

（2）　（ア）

$$\lim_{x\to 1+0}g(x)=\lim_{x\to 1+0}x^{\frac{1}{3}}=1$$

$$\lim_{x\to 1-0}g(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-a)^3+b\ =(1-a)^3+b$$

$g(x)$ が $x=1$ で連続 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1+0}g(x)=\lim_{x\to 1-0}g(x)$ より,

$(1-a)^3+b=1$

したがって，$b=1-(1-a)^3$

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

支援学校高等部　数学　解答用紙 （4枚のうち4）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4（続き）

（イ）

$g(x)$ が，$x=1$ で微分可能ならば，$x=1$ で連続である。

(ア)より，　$b=1-(1-a)^3$・・・①

$$\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-a)^3+b-1}{x-1}$$

①より

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-a)^3-(1-a)^3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)\{(x-a)^2+(x-a)(1-a)+(1-a)^2\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\{(x-a)^2+(x-a)(1-a)+(1-a)^2\}=3(1-a)^2$$

$g(x)$ が $x=1$ で微分可能 $\Leftrightarrow \lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ より，

$\frac{1}{3}=3(1-a)^2$　$a=\frac{2}{3}$ ，$\frac{4}{3}$

①より　$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{26}{27}$ または，　$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{28}{27}$