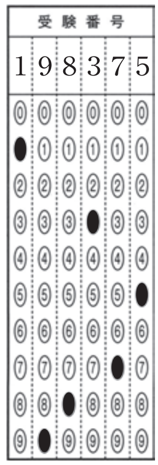
令和４年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1



記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

受験番号	*198375*

解答についての注意点

1　解答用紙は，マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

2　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，マーク式解答用紙に，
大問$\boxed{3}$，大問$\boxed{4}$については，記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら，まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し，受験番号に対応する数字を，右の記入例に従って，鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は，全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

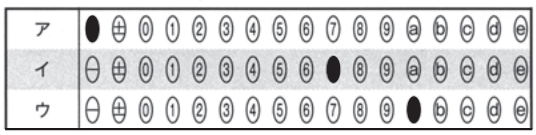
4　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は，マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは，消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$などには，特に指示のないかぎり，符号（－，±），数字（0～9），または文字（a～e）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$に $-7a$ と答えたいとき



なお，同一の問題文中に$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$のように細枠で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$に$-\dfrac{4}{5}$と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$として答えてください。

また，それ以上約分できない形で答えてください。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。
また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしてください。

例えば，$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$に 2.9 と答えたいときは，2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$のように答えてはいけません。

（6）　比の形で解答する場合，最も簡単な整数比で答えてください。

例えば，1：3 と答えるところを，2：6 のように答えてはいけません。

5　その他，係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

$\boxed{1}$ (1) $4x-3y=20 \cdots$① を満たす整数 x, y について，$0 \leqq x+y \leqq 100$ を満たす整数 x, y の組の数を求める。

$x=\boxed{ア}$，$y=\boxed{イ}$ は①を満たしており，$4\times\boxed{ア}-3\times\boxed{イ}=20 \cdots$②が成り立つ。

①と②より，$\boxed{ウ}(x-\boxed{ア})=\boxed{エ}\,y$ と変形できる。k を整数とすると，

$$\begin{cases} x=\boxed{オ}\,k+\boxed{カ} \\ y=\boxed{キ}\,k \end{cases}$$

と表すことができる。よって，$0 \leqq x+y \leqq 100$ を満たす整数 x, y の組は $\boxed{クケ}$ 組ある。

(2) i を虚数単位とする。$z=-\dfrac{14}{3+\sqrt{5}\,i}$ のとき，$z^4+4z^3-20z-22$ の値を求める。

z を計算すると，$z=\boxed{コサ}+\sqrt{\boxed{シ}}\,i$ となる。

これを変形すると，$z^2+\boxed{ス}\,z+\boxed{セソ}=0$ となる。

また，$z^4+4z^3-20z-22$ を $z^2+\boxed{ス}\,z+\boxed{セソ}$ で割ったときの余りは，$\boxed{タチ}\,z+\boxed{ツ}$ となるので，$z^4+4z^3-20z-22=\boxed{テトナ}+\boxed{ニヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}\,i$ である。

$\boxed{2}$ (1) 関数 $y = |x^2 - 4| - 2x$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$ は $x =$ $\boxed{ア}$ のとき，最小値 $\boxed{イウ}$ である。

(2) 6個の数字1，2，3，4，5，6のすべてを重なりなく使用してできる6桁の数を，小さい順に並べるとき，

(ア) 初めて300000以上になる数は小さい方から数えると $\boxed{エオカ}$ 番目である。

(イ) 小さい方から数えて300番目の数の一の位は $\boxed{キ}$ である。

(3) 点Oを中心とする円に内接する△ABCおいて，AB = 2，BC = 6，CA = 5であるとき，$\angle AOB = \alpha$ とおくと，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{クケコ}}{\boxed{サシス}}$ となる。ただし，$0 < \alpha < \pi$ とする。

(4) 実数 t が $0 \leqq t \leqq 4$ を動くとき，方程式 $x^2 + y^2 - 2tx - 2y + t^2 - 3 = 0$ が表す図形が通過する領域と，不等式 $y \leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi + \boxed{タ} - \sqrt{\boxed{チ}}$ である。

ただし，円周率を π とする。

(5) a，b は実数とする。初項 a，公比 b の等比数列において，初項から第4項までの和は -15 であり，初項から第8項までの和は -255 である。また，初項 a，公差 b の等差数列の初項から第4項までの和は0である。このとき，$a =$ $\boxed{ツ}$，$b =$ $\boxed{テ}$ である。

$\boxed{ツ}$ 及び $\boxed{テ}$ について，下の⓪～⑧のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ −1　⑥ −2　⑦ −3　⑧ −4

(6) △OABにおいて，辺OAを5:4に内分する点をC，辺OBを1:7に内分する点をD，線分ADと線分BCとの交点をEとする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{OE} = \dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}\vec{b}$ と表すことができる。

(7) あるアクリル板を1枚通るたびに，光線はその強さを20％失う。

このアクリル板を $\boxed{ヒフ}$ 枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さがもとの強さの1％以下になる。$\log_{10}2 = 0.3010$ として，$\boxed{ヒフ}$ に当てはまる最小の数値を答えよ。

(8) a を実数とする。3次方程式 $\dfrac{1}{3}x^3 - ax + a = 0$ が異なる3つの実数解を持つための必要十分条件は $a > \dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

3 (1) a, b, c が正の実数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (ア) $f(x) = \log(\tan x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(イ) $\dfrac{\pi}{6} < p < q < \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$2 \leqq \frac{\log(\tan q) - \log(\tan p)}{q-p} < \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

が成り立つことを証明せよ。

4 n を 2 以上の自然数とし，曲線 $y = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を S とする。

(1) 曲線 $y = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ 上の点を $\mathrm{P}(t, t^n)$ とし，P から直線 $y = x$ に下ろした垂線と直線 $y = x$ との交点を H とする。原点を O とするとき，線分 PH および線分 OH の長さを t を用いて表せ。

(2) S を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_n を n を用いて表せ。

ただし，円周率を π とする。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} V_n$ の値を求めよ。

【計算用紙】

（必要に応じて使用すること）