

受験番号	
------	--

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

((1) は解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3

得点	
----	--

(1)

$$x = \log_a b \text{ とおくと, } a^x = b$$

$c \neq 1$ なので, 両辺 c を底とする対数をとると,

$$\log_c a^x = \log_c b \Leftrightarrow x \log_c a = \log_c b$$

ここで, $a \neq 1$ より, $\log_c a \neq 0$ なので, $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\text{よって, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

((2)の(イ)は解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること

(2)の(ア)は答えのみでよい)

3 (続き)

(2) (ア)

$f'(x) = \frac{2}{\sin 2x}$	/
-----------------------------	---

(イ)

(ア)の関数 $f(x)$ は区間 $[p, q]$ において連続かつ区間 (p, q) において微分可能なので、平均値の定理より、

$$\frac{\log(\tan q) - \log(\tan p)}{q - p} = \frac{2}{\sin 2c} \dots \textcircled{1}$$

$$p < c < q \dots \textcircled{2}$$

を満たす実数 c が存在する。

条件と②より、 $\frac{\pi}{6} < c < \frac{\pi}{3}$ なので、 $\frac{\pi}{3} < 2c < \frac{2}{3}\pi$ である。

これより、 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2c \leq 1$ であることから、

$$2 \leq \frac{2}{\sin 2c} < \frac{4\sqrt{3}}{3} \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。よって、①と③より、

$$2 \leq \frac{\log(\tan q) - \log(\tan p)}{q - p} < \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4

得点

(1)

点と直線の距離の公式より、 $PH = \frac{|t - t^n|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$ で、 $0 \leq t \leq 1$ より、 $PH = \frac{t - t^n}{\sqrt{2}}$

$$\frac{OH}{\sqrt{2}} + \frac{PH}{\sqrt{2}} = t \text{ より、 } OH = \sqrt{2}t - PH = \frac{t + t^n}{\sqrt{2}}$$

(2)

$OH = h$ とおくと、 $0 \leq h \leq \sqrt{2}$ より、求める回転体の体積 V_n は、

$$V_n = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (PH)^2 dh$$

h	$0 \rightarrow \sqrt{2}$
t	$0 \rightarrow 1$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1 + nt^{n-1}}{\sqrt{2}} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^1 \left(\frac{t - t^n}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1 + nt^{n-1}}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \{t^2 + (n-2)t^{n+1} + (1-2n)t^{2n} + nt^{3n-1}\} dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{n-2}{n+2} t^{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1} t^{2n+1} + \frac{1}{3} t^{3n} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{n-2}{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)} \pi \end{aligned}$$

受験番号	
------	--

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4 (続き)

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{n-2}{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \pi\end{aligned}$$

