

受験番号	
------	--

令和3年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3

得点

〔1〕

(i) $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ のとき、円の中心 (原点) と点 (x_1, y_1) を通る直線の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ で、

点 (x_1, y_1) における円の接線はこれと垂直なので、傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ であるから、

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

点 (x_1, y_1) は円上の点なので、 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

よって、求める接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2 \dots \textcircled{1}$

(ii) $x_1 = 0$ のとき、 $y_1 = \pm r$

$y_1 = r$ のとき接線の方程式は $y = r$ であり、

$y_1 = -r$ のとき接線の方程式は $y = -r$ である。

(iii) $y_1 = 0$ のとき、 $x_1 = \pm r$

$x_1 = r$ のとき接線の方程式は $x = r$ であり、

$x_1 = -r$ のとき接線の方程式は $x = -r$ である。

(ii), (iii) の場合も $\textcircled{1}$ は成り立つので

x_1, y_1 の値によらず、接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2$ であることが示せた。

支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3 (続き)

[2] (1)

接点の座標を (x_1, y_1) とおくと、接線の方程式は $x_1x + y_1y = 25$

点 $A(7, 1)$ がこの直線上にあるので $7x_1 + y_1 = 25$

点 (x_1, y_1) は円 O 上にあるので $x_1^2 + y_1^2 = 25$

$$x_1^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \quad \therefore x_1 = 3, 4$$

$x_1 = 3$ のとき $y_1 = 4$, $x_1 = 4$ のとき $y_1 = -3$

また、接点 S が第1象限にあることから

$S(3, 4)$, $T(4, -3)$

よって、求める接線の方程式は

$$l : 3x + 4y = 25, m : 4x - 3y = 25$$

(2)

求める円の中心を $O'(X, Y)$, 半径を R とし、

円 O' と直線 l の接点を S' とする。

O' から線分 OS に垂線 $O'H$ を下ろすと、

$\triangle OAS \sim \triangle OO'H$ より、

$$OA : OS = OO' : OH$$

$$= 5\sqrt{2} : 5 = (5 + R) : (5 - R) \text{ より, } R = 5(\sqrt{2} - 1)^2$$

点 $O'(X, Y)$ は線分 OA を $OH : HS = (5 - R) : R$ に内分するので

$$X = 14(\sqrt{2} - 1), Y = 2(\sqrt{2} - 1)$$

以上より、円の方程式は

$$\{x - 14(\sqrt{2} - 1)\}^2 + \{y - 2(\sqrt{2} - 1)\}^2 = 25(\sqrt{2} - 1)^4$$

受験番号	
------	--

令和3年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4

得点

〔1〕 (1)

$f(x)$ が $x = \frac{\pi}{2}$ で連続であるための条件は

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

問題で与えられた条件より $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2 \tan x} = 0 \text{ より}$$

$a = 0$ と定めればよい。

(2)

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 + 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$$

(\because (1) より $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 - 2 \frac{1}{\tan h}} = \frac{1}{h - 2 \frac{h}{\sin h} \cos h} \rightarrow -\frac{1}{2} (h \rightarrow 0)$$

($\because \frac{h}{\sin h} \rightarrow 1 (h \rightarrow 0)$)

よって $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で微分可能である。

支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4 (続き)

〔2〕

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx + \int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1} dx \\ \text{ここで } \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx &= \int_0^2 \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx \\ &= \frac{1}{3} [\log|x^3+1|]_0^2 = \frac{1}{3} \log 9 = \frac{2}{3} \log 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1} dx &= \int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } x &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと} \\ dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \end{aligned}$$

また x と t の対応は右の表のようになる。

x	$0 \rightarrow 2$
t	$-\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\text{よって } \int_0^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1} dx = \frac{2}{3} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$