

受験番号	
------	--

令和3年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

## 支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3

得点

〔1〕

(i)  $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$  のとき、円の中心 (原点) と点  $(x_1, y_1)$  を通る直線の傾きは  $\frac{y_1}{x_1}$  で、

点  $(x_1, y_1)$  における円の接線はこれと垂直なので、傾きは  $-\frac{x_1}{y_1}$  であるから、

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

点  $(x_1, y_1)$  は円上の点なので、 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

よって、求める接線の方程式は  $x_1x + y_1y = r^2 \dots \textcircled{1}$

(ii)  $x_1 = 0$  のとき、 $y_1 = \pm r$

$y_1 = r$  のとき接線の方程式は  $y = r$  であり、

$y_1 = -r$  のとき接線の方程式は  $y = -r$  である。

(iii)  $y_1 = 0$  のとき、 $x_1 = \pm r$

$x_1 = r$  のとき接線の方程式は  $x = r$  であり、

$x_1 = -r$  のとき接線の方程式は  $x = -r$  である。

(ii), (iii) の場合も  $\textcircled{1}$  は成り立つので

$x_1, y_1$  の値によらず、接線の方程式は  $x_1x + y_1y = r^2$  であることが示せた。

## 支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3 (続き)

〔2〕 (1)

接点の座標を  $(x_1, y_1)$  とおくと、接線の方程式は  $x_1x + y_1y = 25$

点  $A(7, 1)$  がこの直線上にあるので  $7x_1 + y_1 = 25$

点  $(x_1, y_1)$  は円  $O$  上にあるので  $x_1^2 + y_1^2 = 25$

$$x_1^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \quad \therefore x_1 = 3, 4$$

$x_1 = 3$  のとき  $y_1 = 4$ ,  $x_1 = 4$  のとき  $y_1 = -3$

また、接点  $S$  が第1象限にあることから

$S(3, 4)$ ,  $T(4, -3)$

よって、求める接線の方程式は

$$l : 3x + 4y = 25, m : 4x - 3y = 25$$

(2)

求める円の中心を  $O'(X, Y)$ , 半径を  $R$  とし、

円  $O'$  と直線  $l$  の接点を  $S'$  とする。

$O'$  から線分  $OS$  に垂線  $O'H$  を下ろすと、

$\triangle OAS \sim \triangle OO'H$  より、

$$OA : OS = OO' : OH$$

$$= 5\sqrt{2} : 5 = (5 + R) : (5 - R) \text{ より, } R = 5(\sqrt{2} - 1)^2$$

点  $O'(X, Y)$  は線分  $OA$  を  $OH : HS = (5 - R) : R$  に内分するので

$$X = 14(\sqrt{2} - 1), Y = 2(\sqrt{2} - 1)$$

以上より、円の方程式は

$$\{x - 14(\sqrt{2} - 1)\}^2 + \{y - 2(\sqrt{2} - 1)\}^2 = 25(\sqrt{2} - 1)^4$$

受験番号	
------	--

令和3年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

## 支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4

得点

〔1〕 (1)

$f(x)$  が  $x = \frac{\pi}{2}$  で連続であるための条件は

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

問題で与えられた条件より  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2 \tan x} = 0 \text{ より}$$

$a = 0$  と定めればよい。

(2)

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 + 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$$

( $\because$  (1) より  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ )

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 - 2 \frac{1}{\tan h}} = \frac{1}{h - 2 \frac{h}{\sin h} \cos h} \rightarrow -\frac{1}{2} (h \rightarrow 0)$$

( $\because \frac{h}{\sin h} \rightarrow 1 (h \rightarrow 0)$ )

よって  $f(x)$  は  $x = \frac{\pi}{2}$  で微分可能である。

## 支援学校高等部 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4 (続き)

〔2〕

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx + \int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1} dx \\ \text{ここで } \int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx &= \int_0^2 \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx \\ &= \frac{1}{3} [\log|x^3+1|]_0^2 = \frac{1}{3} \log 9 = \frac{2}{3} \log 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1} dx &= \int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } x &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t \left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと} \\ dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \end{aligned}$$

また  $x$  と  $t$  の対応は右の表のようになる。

$x$	$0 \rightarrow 2$
$t$	$-\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx &= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\text{よって } \int_0^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1} dx = \frac{2}{3} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$