受験番号	

令和3年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち１）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3

得点	

〔１〕

(i) $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ のとき, 円の中心（原点）と点 (x_1, y_1) を通る直線の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ で,

点 (x_1, y_1) における円の接線はこれと垂直なので, 傾きは $-\dfrac{x_1}{y_1}$ であるから,

$y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

$x_1x + y_1y = {x_1}^2 + {y_1}^2$

点 (x_1, y_1) は円上の点なので, ${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$

よって, 求める接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2 \cdots$ ①

(ii) $x_1 = 0$ のとき, $y_1 = \pm r$

$y_1 = r$ のとき接線の方程式は $y = r$ であり,

$y_1 = -r$ のとき接線の方程式は $y = -r$ である。

(iii) $y_1 = 0$ のとき, $x_1 = \pm r$

$x_1 = r$ のとき接線の方程式は $x = r$ であり,

$x_1 = -r$ のとき接線の方程式は $x = -r$ である。

(ii), (iii) の場合も①は成り立つので

x_1, y_1 の値によらず, 接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2$ であることが示せた。

受験番号	

令和3年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち２）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3　（続き）

〔２〕（１）

接点の座標を (x_1, y_1) とおくと, 接線の方程式は $x_1x + y_1y = 25$

点 $\mathrm{A}(7,1)$ がこの直線上にあるので $7x_1 + y_1 = 25$

点 (x_1, y_1) は円 O 上にあるので ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 25$

${x_1}^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \quad \therefore x_1 = 3, 4$

$x_1 = 3$ のとき $y_1 = 4$, $x_1 = 4$ のとき $y_1 = -3$

また, 接点 S が第１象限にあることから

$\mathrm{S}(3,4)$, $\mathrm{T}(4,-3)$

よって, 求める接線の方程式は

$l : 3x + 4y = 25$, $m : 4x - 3y = 25$

（２）

求める円の中心を O’(X,Y), 半径を R とし,

円 O’ と直線 l の接点を S’ とする。

O’ から線分 OS に垂線 O’H を下ろすと,

△ OAS ∽△ OO’H より,

OA : OS=OO’ : OH

$= 5\sqrt{2} : 5 = (5+R) : (5-R)$ より, R$= 5(\sqrt{2}-1)^2$

点 O’(X,Y) は線分 OA を OH : HS $=$ (5 $-$ R) : R に内分するので

X$= 14(\sqrt{2}-1)$, Y$= 2(\sqrt{2}-1)$

以上より, 円の方程式は

$\{x - 14(\sqrt{2}-1)\}^2 + \{y - 2(\sqrt{2}-1)\}^2 = 25(\sqrt{2}-1)^4$

受験番号	

令和３年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち３）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4 得点

〔１〕（１）

$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

問題で与えられた条件より $f(\frac{\pi}{2})=a$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\tan x}=0$ より

$a=0$ と定めればよい。

（２）

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}+h)-f(\frac{\pi}{2})}{h}=\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1+2\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}$$

$(\because (1)$ より $f(\frac{\pi}{2})=0)$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1-2\frac{1}{\tan h}}=\frac{1}{h-2\frac{h}{\sin h}\cos h}\to-\frac{1}{2}(h\to 0)$$

$\left(\because \dfrac{h}{\sin h}\to 1(h\to 0)\right)$

よって $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能である。

受験番号	

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち４）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

$\boxed{4}$　（続き）

〔２〕

(与式)$= \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx + \int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1}\,dx$

ここで $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,dx$

$= \dfrac{1}{3}\left[\log|x^3+1|\right]_0^2 = \dfrac{1}{3}\log 9 = \dfrac{2}{3}\log 3$

また $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$

ここで $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$

また x と t の対応は右の表のようになる。

x	$0 \to 2$
t	$-\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

したがって，

$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$

$= \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{\dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

よって $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$