京都数学グランプリ 2015　1 st ステージ

京都・大阪数学コンテスト 2015

注　意　事　項

1　問題は，1 ページから 6 ページにあります。
2　解答用紙は，全部で 5 枚あります。
3　あなたのコンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
4　解答は，問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお，問題番号 $\boxed{1}$ については答えのみを，問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については答えのみでなく考え方等も記入してください。（問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については，考え方等も採点対象となります。）
5　解答時間は 3 時間です。なお，トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

$\boxed{1}$　次の各問いに答えなさい。

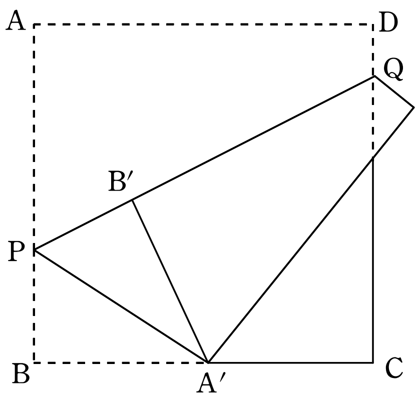
（１）　2 桁の正の整数 n がある。n の 2 乗は 4 桁の整数で，千の位の数と百の位の数が等しく，十の位の数と一の位の数が等しい。

このとき，n を求めなさい。

（２）　1 辺の長さが 3 である正方形 ABCD がある。右の図のように，頂点 A を辺 BC に重なるように折り返し，頂点 A が移った点を A′，その時の折り目を PQ とする。

さらに，PA′ を折り目として頂点 B を折り返したところ，頂点 B は PQ 上の点 B′ に移った。

このとき，線分 DQ の長さを求めなさい。



（３）　1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 個のボールが袋に入っている。この袋からボールを 1 個取り出す操作を繰り返し，取り出したボールに書かれている数字の合計が 10 以上になったらこの操作をやめる。

操作をやめたとき，取り出したボールに書かれている数字の合計がちょうど 10 になる確率を求めなさい。ただし，一度取り出したボールは袋に戻さないものとする。

（4）　図１のように，平面上に異なる４点 A，B，C，D をとり，A と B を端点とする曲線と，C とD を端点とする曲線をそれぞれ描く。ただし，いずれの曲線も端点以外では４点A，B，C，Dを通らないものとする。また，曲線を描く際，すでに存在する曲線を横切って交点をつくることはできるが，すでに存在する曲線に重ねて描いたり，すでに存在する交点を通るように描いたりすることはできないものとする。

この図形において，曲線上をある端点からある端点まで進む点 P を考える。点 P は，交点に到達するごとに，図２に示した「左折」と「右折」を交互に繰り返す。ただし，最初に到達する交点では必ず「左折」を選ぶこととする。

たとえば，図３のように点 A を出発点として曲線上を進むと点 C に到達する。このことを

「A → C」

と表すことにすると，他の点については図４のように，

「B → C」
「C → B」
「D → A」

となる。

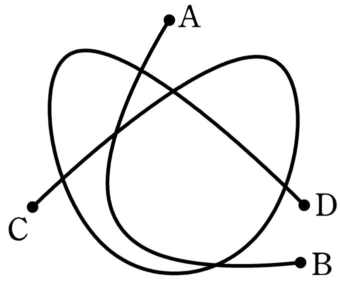


図１

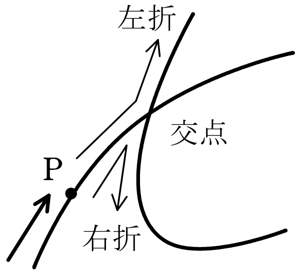


図２

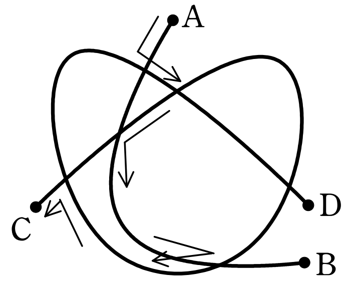
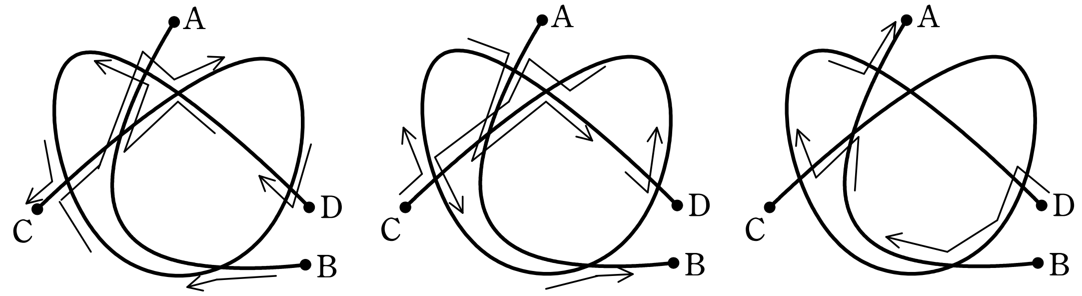


図３

図４



「B → C」　「C → B」　「D → A」

以上のようにして作った，４点と２本の曲線からなる図形を「曲線アミダ」とよぶ。このとき，出発点から到達点への対応が

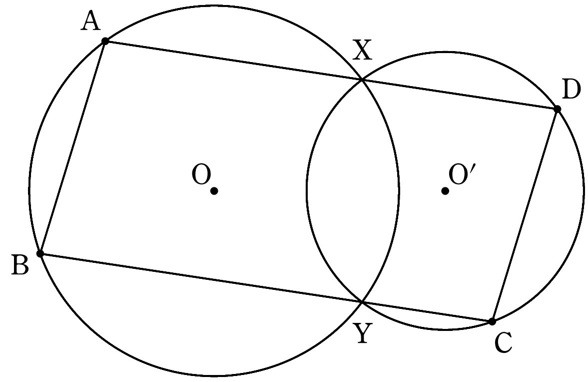
「A → D」「B → C」「C → A」「D → A」

となるように，曲線アミダを作りなさい。

$\boxed{2}$　次の図のように，直径が 20 である円 O と直径が 15 である円 O′ が 2 点 X，Y で交わっており，線分 XY の長さが 12 である。また，円 O の円周上に 2 点 A，B が，円 O′ の円周上に 2 点 C，D がそれぞれあり，線分 AD は点 X を通り，線分 BC は点 Y を通っている。

AD∥BC が成り立つときの，四角形 ABCD の面積の最大値を求めなさい。

ただし，線分 OO′ と線分 XY は交わるものとし，4 点 A，B，C，D は，いずれも 2 点 X，Y とは異なる位置にあるものとする。



3　太郎君は7連休の過ごし方の計画を立てている。

この7日間のそれぞれの日において，「山登り」，「海水浴」，「家で休養」のいずれかひとつだけ行うとき，7日間の計画の立て方は全部で何通りあるか求めなさい。

ただし，この7連休の期間中に，「山登り」と「海水浴」については，それぞれ3日間以上続くことはないものとする。

$\boxed{4}$　集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2015\}$ の部分集合 S は，どの 2 つの要素をとってもその差が 5 にも 11 にもならない。このような集合 S の要素の個数の最大値を求めなさい。

ただし，ここでいう差とは大きい方の数から小さい方の数を引いた値のこととする。

5　赤色の積み木と青色の積み木がそれぞれ多数あり，どの積み木も1辺の長さが1 cmの立方体である。これらの積み木を隙間なく積み上げることを考える。

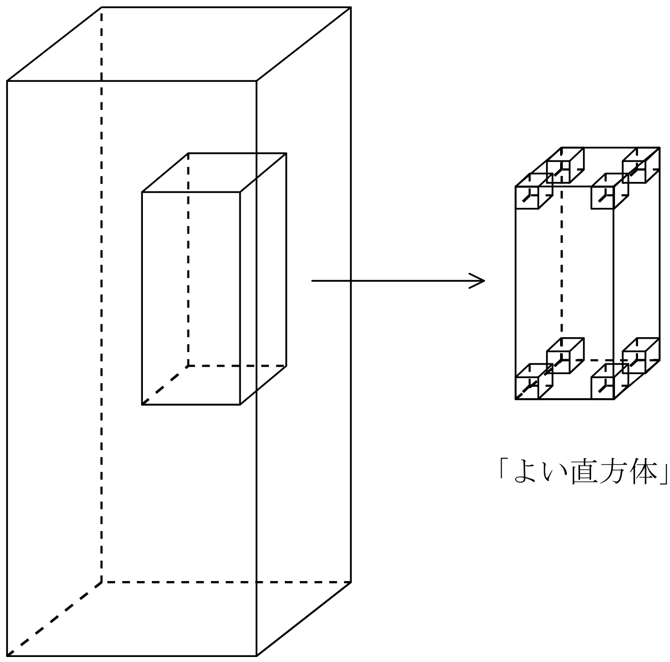
ここで，次の条件①，②，③をすべて満たす直方体を「よい直方体」とよぶ。

（条件①）いくつかの積み木を積み上げてできている。

（条件②）いずれの辺の長さも2 cm以上である。

（条件③）8つの隅の積み木がすべて同じ色である。

平らなテーブルの上に積み木を積み上げて，縦の長さ3 cm，横の長さ7 cm，高さ127 cmの直方体Lをつくる。2色の積み木をどのように組み合わせても，直方体Lは「よい直方体」を必ず含むことを示しなさい。



※8つの隅の積み木がすべて同じ色

「よい直方体」

「直方体L」

【終わり】