

京都・大阪数学コンテスト2015 略解

1 (1) a を1桁の正の整数とし、 b を1桁の正の整数または0とする。

$n^2 = 1000a + 100a + 10b + b$ とおくと、 $n^2 = 11(100a + b)$ であり、 n^2 は11の倍数、すなわち n は11の倍数。
 n は2桁の整数であるから、 $n = 11, 22, 33, \dots, 99$

実際に計算すると、

$$11^2 = 121, 22^2 = 484, 33^2 = 1089, 44^2 = 1936, 55^2 = 3025,$$

$$66^2 = 4365, 77^2 = 5929, 88^2 = 7744, 99^2 = 9801$$

ゆえに、条件を満たすものは $n = 88$ ………… 答

別解

$n = 10a + b$, $n^2 = 1000c + 100c + 10d + d = 1100c + 11d$ とする。

ただし、 a, c は1桁の正の整数、 b, d は1桁の正の整数または0とする。

$n^2 = 11(100c + d)$ …① より、 n は11の倍数である。

よって、 $a = b$ が成り立ち、 $n = 11a$ と表せる。

$n = 11a$ を①に代入すると、

$$(11a)^2 = 11(100c + d) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$11a^2 = 100c + d$$

$$11a^2 = 99c + c + d$$

$$11(a^2 - 9c) = c + d$$

したがって $c + d$ は11の倍数であるが $0 < c + d \leq 18$ より $c + d = 11$

よって、 $a^2 - 9c = 1$

$a^2 = 9c + 1$ を満たす自然数 (a, c) の組は、 $(a, c) = (8, 7)$ 。このとき、 $d = 4$

これらを②に代入すると、 $88^2 = 7744$ となり、題意を満たす。

よって、 $n = 88$ ………… 答

(2) 頂点 D が移った点を D' 、 $D'A'$ と DC の交点を R とする。

折り返しの条件より、 $\angle A'PB = \angle A'PB' = \angle APB'$ であるから、 $3 \times \angle A'PB = 180^\circ$

したがって、 $\angle A'PB = 60^\circ$ より、 $\triangle A'PB$ は辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ である直角三角形である。

よって、 $AP : PB = 2 : 1$ より、 $AP = AP' = 2$, $PB = 1$, $A'B = \sqrt{3}$ ………… (☆)

また、 $\angle PA'R = 90^\circ$ より、 $\angle RA'C = 60^\circ$ であるから、 $\triangle A'PB \sim \triangle RA'C$

よって、 $A'C = BC - A'B = 3 - \sqrt{3}$ より、 $RC = \sqrt{3} \times (3 - \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3$

さらに、 $\angle RCA' = \angle RD'Q = 90^\circ$ と、対頂角が等しいことから、 $\triangle RA'C \sim \triangle RQD'$

ここで、 $RQ : QD' = 2 : 1$, $DQ = QD'$ であるから、 $DQ = x$ とすると、線分 CD の長さについて

$$x + 2x + (3\sqrt{3} - 3) = 3 \text{ が成り立つ。よって } x = 2 - \sqrt{3}$$

ゆえに、 $DQ = 2 - \sqrt{3}$ ………… 答

別解 (☆) のつづき

点 D を通り、 PQ に平行な直線をひき、辺 AB との交点を E とすると、四角形 $EPQD$ は平行四辺形である。

また、 $\angle AED = 60^\circ$ が成り立つので、 $AE = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ゆえに、 $DQ = EP = AP - AE = 2 - \sqrt{3}$ ………… 答

2 与えられた条件 $AD \parallel BC$ と、四角形 $ABYX$ と四角形 $XYCD$ がそれぞれ円に内接することから
 $\angle XAB + \angle XDC = \angle XYC + \angle XYB = 180^\circ$
 よって、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。
 ゆえに、四角形 $ABCD$ の面積は $\triangle AYD$ の面積の 2 倍となり、 $\triangle AYD$ の面積が最大となるとき、四角形 $ABCD$ の面積は最大となる。

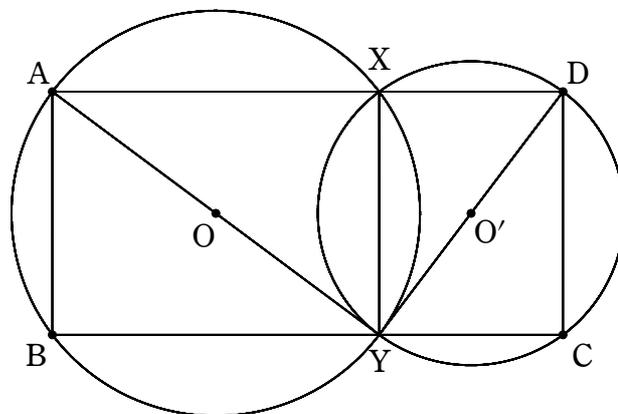
ここで、 $\angle YAX$ と $\angle YDX$ が円周角の定理によりそれぞれ一定であることから、 $\angle AYD$ は一定である。
 よって、2 辺の積 $AY \cdot DY$ が最大のとき、 $\triangle AYD$ の面積は最大となる。

AY が最大となるのは AY が円 O の直径と一致するときであるが、このとき DY も円 O' の直径と一致し最大となる。したがって、 $\triangle AYD$ の面積が最大となるのは、 $AY = 20$ 、 $DY = 15$ のときである。

このとき、 $\angle AXY = \angle DXY = 90^\circ$ であることから
 $AD = \sqrt{20^2 - 12^2} + \sqrt{15^2 - 12^2} = 16 + 9 = 25$

したがって、 $AD^2 = AY^2 + DY^2$ が成り立つので、 $\triangle AYD$ は $\angle AYD = 90^\circ$ の直角三角形である。
 以上のことから、四角形 $ABCD$ の面積の最大値は、

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 20 \times 15 \right) = 300 \quad \dots\dots\dots \text{答}$$



3 A: 山登り, B: 海水浴, C: 家で休養, とし, 3 つの文字 A, B, C をいくつかずつ用いて 7 つ並べる並べ方を考える。

並べ方の総数は、 3^7 通り。

このうち「A が 3 つ以上続く」または「B が 3 つ以上続く」並べ方は以下の (i) ~ (v) の場合である。

(i) 「A がちょうど 7 つ続く」または「B がちょうど 7 つ続く」場合

2 通り

(ii) 「A がちょうど 6 つ続く」または「B がちょうど 6 つ続く」場合

連続する 6 つの文字の決め方は 2 通り、並べる箇所の決め方は 2 通り、残りの文字の決め方は 2 通り

したがって、このときの並べ方は

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ 通り}$$

(iii) 「A がちょうど 5 つ続く」または「B がちょうど 5 つ続く」場合

連続する 5 つの文字の決め方は 2 通り、

並べる箇所の決め方は右の (ア) ~ (ウ) の 3 通り

残りの文字の並べ方は

- (ア) (連続する 5 つ) ○ ○
- (イ) ○ ○ (連続する 5 つ)
- (ウ) ○ (連続する 5 つ) ○

(ア), (イ) のとき、それぞれ $2 \times 3 = 6$ 通り、

(ウ) のとき $2 \times 2 = 4$ 通り

したがって、このときの並べ方は、

$$2 \times 6 \times 2 + 2 \times 4 = 32 \text{ 通り}$$

(iv) 「A がちょうど4つ続く」または「B がちょうど4つ続く」場合

連続する4つの文字の決め方は2通り、

並べる箇所の決め方は右の(エ)～(キ)の4通り

残りの文字の決め方は

(エ), (キ)のとき、それぞれ $2 \times 3 \times 3 = 18$ 通り、

(オ), (カ)のとき、それぞれ $2 \times 2 \times 3 = 12$ 通り

したがって、このときの並べ方は、

$$2 \times 18 \times 2 + 2 \times 12 \times 2 = 72 + 48 = 120 \text{ 通り}$$

(v) 「A がちょうど3つ続く」または「B がちょうど3つ続く」場合

連続する3つの文字の決め方は2通り

並べる箇所の決め方は右の(ク)～(シ)の5通り

残りの文字の決め方は、

(ク), (シ)のとき、それぞれ $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ 通り

(ケ), (コ), (サ)のとき、それぞれ $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ 通り

ただし、右の(ス)～(チ)の場合が重複して数えられているので、その分を除かなければならない。

重複して数えているものは、

(ス), (セ)のとき、それぞれ $2 \times 2 = 4$ 通り

(ソ)のとき $2 \times 2 + 2 = 6$ 通り

また、(タ), (チ)は (iv) と重複していて、それぞれ 2通り

したがって、重複して数えているものは全部で $4 \times 2 + 6 + 2 \times 2 = 18$ 通り

よって、このときの並べ方は、

$$2 \times 54 \times 2 + 2 \times 36 \times 3 - 18 = 414 \text{ 通り}$$

(i)～(v)より、AもBも3つ以上続かない並べ方は

$$3^7 - (2 + 8 + 32 + 120 + 414) = 1611 \text{ 通り}$$

以上より、求める計画の立て方は 1611通り …… ㊦

(エ) (連続する4つ) ○○○

(オ) ○ (連続する4つ) ○○○

(カ) ○○ (連続する4つ) ○

(キ) ○○○ (連続する4つ)

(ク) (連続する3つ) ○○○○

(ケ) ○ (連続する3つ) ○○○○

(コ) ○○ (連続する3つ) ○○○

(サ) ○○○ (連続する3つ) ○

(シ) ○○○○ (連続する3つ)

(ス) (連続する3つ) (連続する3つ) ○

(セ) ○ (連続する3つ) (連続する3つ)

(ソ) (連続する3つ) ○ (連続する3つ)

(タ) (連続する4つ) (連続する3つ)

(チ) (連続する3つ) (連続する4つ)

別解 その1

A: 山登り, B: 海水浴, C: 家で休養, とし, A, B, Cをいくつかずつ用いて7つ並べる並べ方を考える。

並べ方の総数は, 3^7 通り。

このうち「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」並べ方は以下の(i)～(v)の場合である。

(i) 初日から「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」場合

(AAA) ○○○○の並びは, 3^4 通り。

(BBB) も同様であるので, $2 \times 3^4 = 162$ 通り。

(ii) 2日目から「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」場合

(AAA) について, B (AAA) ○○○またはC (AAA) ○○○の並びは, 2×3^3 通り。

(BBB) も同様であるので, $2 \times 2 \times 3^3 = 108$ 通り。

(iii) 3日目から「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」場合

(AAA) について, ○B (AAA) ○○または○C (AAA) ○○の並びは, 2×3^3 通り。

(BBB) も同様であるので, $2 \times 2 \times 3^3 = 108$ 通り。

(iv) 4日目から「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」場合

(AAA) について、 $\circ\circ B$ (AAA) \circ または $\circ\circ C$ (AAA) \circ の並びは、 2×3^3 通り。

ただし、 BBB (AAA) \circ の並びは (i) と重複するので除くと、 $2 \times 3^3 - 3$ 通り

(BBB) も同様であるので、 $2 \times (2 \times 3^3 - 3) = 102$ 通り。

(v) 5日目から「Aが3つ以上続く」または「Bが3つ以上続く」場合

(AAA) について、 $\circ\circ\circ B$ (AAA) または $\circ\circ\circ C$ (AAA) の並びは、 2×3^3 通り。

ただし、 $AAAB$ (AAA), $AAAC$ (AAA), $BBBB$ (AAA), $BBBC$ (AAA) の並びは (i) と重複し、

$ABBB$ (AAA), $CBBB$ (AAA) の並びは (ii) と重複するので除くと、 $2 \times 3^3 - 6$ 通り

(BBB) も同様であるので、 $2 \times (2 \times 3^3 - 6) = 96$ 通り。

したがって、A, B, Cのいくつかずつを用いて7つ並べるとき、AもBも3つ以上続かない並べ方は、

$$3^7 - (162 + 108 + 108 + 102 + 96) = 1611 \text{ 通り}$$

以上より、求める計画の立て方は、1611通り …………… ㊦

別解 その2

問題文の条件を満たす n 日間の計画の立て方の総数を p_n とおく。

また、その中で最終日の過ごし方が「山登り」「海水浴」「家で休養」であるものをそれぞれ a_n, b_n, c_n とおくと

$$a_n + b_n + c_n = p_n \quad \cdots \text{①}$$

ここで、説明のため「山登り」「海水浴」「家で休養」の過ごし方をそれぞれ A, B, C とおく。

まず、明らかに $p_1 = 3, p_2 = 3^2 = 9$

p_3 については、すべての計画の立て方から3日間連続でAを行った場合と3日間連続でBを行った場合の2通りを除けばよいから、 $p_3 = 3^3 - 2 = 25$

次に、 $n \geq 4$ のときの p_n について考える。

p_{n-1} 通りのそれぞれの計画に、 n 日目の過ごし方として A, B, C のうちいずれかを加えると、全部で $3 \times p_{n-1}$ 通りの計画を立てることができる。

このうち、問題文の条件を満たさないものは、最後の3日間が連続でAになる場合と連続でBになる場合である。

最後の3日間がAになるものの総数は、 $n-3$ 日目はAではないので $b_{n-3} + c_{n-3}$ 通り。

同様に、最後の3日間がBで終わるものの総数は、 $n-3$ 日目はBではないので $a_{n-3} + c_{n-3}$ 通り。

以上より

$$p_n = 3 \times p_{n-1} - (b_{n-3} + c_{n-3}) - (a_{n-3} + c_{n-3}) = 3 \times p_{n-1} - p_{n-3} - c_{n-3} \quad \cdots \text{② (①より)}$$

②に $n=4$ を代入すると $p_4 = 3 \times p_3 - p_1 - c_1 = 3 \times 25 - 3 - 1 = 71$

$n \geq 5$ のときは $c_{n-3} = p_{n-4}$ が成り立つので、②は $p_n = 3 \times p_{n-1} - p_{n-3} - p_{n-4}$

よって、順に $n=5, n=6, n=7$ を代入して計算すると、

$$p_5 = 3 \times p_4 - p_2 - p_1 = 3 \times 71 - 9 - 3 = 201$$

$$p_6 = 3 \times p_5 - p_3 - p_2 = 3 \times 201 - 25 - 9 = 569$$

$$p_7 = 3 \times p_6 - p_4 - p_3 = 3 \times 569 - 71 - 25 = 1611 \quad \cdots \cdots \cdots \text{㊦}$$

参考

2, 4, 8, 16, 32, … のように、ある規則にしたがって並べた数の列を「数列」とよぶ。

数列においては、1番目の数を初項、2番目の数を第2項、3番目の数を第3項、… とよび、記号で p_1, p_2, p_3, \dots のように表す。第 n 項ならば p_n 、第 $(n+1)$ 項ならば p_{n+1} となる。

また、たとえば $p_{n+1} = 3p_n - 2$ のように、数列の項同士の関係を表した式は「漸化式」とよばれる。

これらは、高校の数学 B で学ぶ考え方の一つである。この漸化式を利用することで、複雑な数式を簡潔に表すことができるなど、さまざまな場面で活用されている。これから学習する人は楽しみにしてほしい。

4 まず、 S の要素の個数が 1009 以上にはならないことを示す。

$2016 \div 16 = 126$ より、次のようなそれぞれ 16 個の要素からなる 126 個の集合、 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{125}$ を考える。

$$A_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}, A_1 = \{16, 17, 18, 19, \dots, 31\}, A_2 = \{32, 33, 34, 35, \dots, 47\}, \dots$$

$$\dots, A_{125} = \{2000, 2001, 2002, 2003, \dots, 2015\}$$

これらは、整数 n を用いて、

$$A_n = \{16n, 16n+1, 16n+2, \dots, 16n+15\} \quad (0 \leq n \leq 125)$$

と表すことができる。

ここで、各 A_n の 16 個の要素について、

$$(n, n+5), (n+10, n+15), (n+4, n+9), (n+14, n+3),$$

$$(n+8, n+13), (n+2, n+7), (n+12, n+1), (n+6, n+11)$$

という 8 つのペアを考えると、これらの要素はいずれも重複せず、すべてのペアで差が 5 または 11 となっている。

S の要素は差が 5 にも 11 にもならないので、各ペアの両方の数が同時に S の要素になることはない。

よって、各 A_n に含まれる S の要素の個数は、それぞれ 8 個以下であることがわかる。……①

ここで、もし集合 S の要素の個数が 1009 以上であると仮定すると、 $1008 \div 126 = 8$ より、 S の要素が 9 個以上含まれるような A_n が少なくとも 1 つ存在することになり、①に矛盾する。

よって、 S の要素の個数は 1009 以上にはならない。

実際、1008 個の偶数からなる集合 $\{0, 2, 4, \dots, 2014\}$ は、どの 2 つの差も偶数であるから 5 にも 11 にもならず、 S の条件を満たしている。

以上より、集合 S の要素の個数の最大値は、1008 …………… 答

参考

5 ずつ増加する数の列 $0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots$ を考え、隣り合う 2 数でペアをつくれば、その差は 5 になる。上記のペアを考える際には、 $5+11=16$ であることから、この数の列を 16 で割った余りに着目した。

別解

2 つの正の整数 a と b が互いに素（最大公約数が 1）であるとき、

$$0, a, 2a, 3a, 4a, \dots, (b-1)a$$

をそれぞれ b で割った余りはすべて異なる。(※)

この性質を用いると、5 と 16 は互いに素であるから

$$0, 1 \times 5, 2 \times 5, 3 \times 5, 4 \times 5, \dots, (16-1) \times 5$$

を 16 で割った余りはすべて異なり、 $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 15$ のいずれかに等しい。

実際には、

$$0, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12, 1, 6, 11 \dots \textcircled{1}$$

である。

この数列 ① の隣同士の項は、必ず差が 5 または 11 であることに着目すれば、

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$$

の部分集合のうち、与えられた条件を満たすもので要素の個数が最大のものは、①の数列から 1 つおきに取り出した項を要素とする集合

$$\{0, 10, 4, 14, 8, 2, 12, 6\} \dots \textcircled{2} \quad \text{または} \quad \{5, 15, 9, 3, 13, 7, 1, 11\} \dots \textcircled{3}$$

であることがわかる。このとき、②は偶数のみ、③は奇数のみの集合であるから、それぞれの集合においてどの2つの要素をとってもその差は偶数であり、5にも11にもならない。

同様に考えれば、0から2015までの整数のうち、16の倍数から始まる連続する16個の数からなる集合

$$A_n = \{16n + 0, 16n + 1, \dots, 16n + 15\} \quad (n \text{ は整数}) \dots \textcircled{4}$$

についても、与えられた条件を満たす部分集合のうち要素の個数が最大のものは、

$$\{16n + 0, 16n + 10, 16n + 4, 16n + 14, 16n + 8, 16n + 2, 16n + 12, 16n + 6\}$$

または、

$$\{16n + 5, 16n + 15, 16n + 9, 16n + 3, 16n + 13, 16n + 7, 16n + 1, 16n + 11\}$$

のいずれかであることがわかる。

すなわち、 A_n の16個の要素のうち「偶数ばかりの8個」または「奇数ばかりの8個」のいずれかを S の要素とすることができるが、この8個が最大で、9個以上を S の要素とすることはできない。

ここで、0から2015までには2016個の整数があり $2016 = 16 \times 126$ であるから、集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 2015\}$ は、④において $n = 0, 1, 2, \dots, 125$ とした126個の集合 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{125}$ に分割することができる。

したがって、各 A_n から最大8個の要素を S の要素とすることができるので、 S の要素の個数の最大値としてありうる値は $8 \times 126 = 1008$ である。実際、各 A_n から「偶数ばかりの8個」を S の要素とすれば、この1008個の要素はすべて偶数となるので、どの2つの差も5にも11にもならず S の条件を満たしている。(※※)

したがって、 S に属する要素の個数の最大値は 1008 …………… 答

参考 ※の証明

2つの正の整数 a と b が互いに素(最大公約数が1)であるとき

$$a, 2a, 3a, 4a, \dots, (b-1)a \dots \textcircled{1}$$

について考える。

①の $(b-1)$ 個の数をそれぞれ b で割った余りのうち、少なくとも一組は同じ値であると仮定し、余りが同じ数を ia, ja とおく(i, j はともに1以上 $b-1$ 以下の整数で、 $i < j$)

このとき、 $(j-i)a$ は b の倍数となるが、 a と b が互いに素であるから $(j-i)$ が b の倍数。

ところが、 $1 \leq (j-i) \leq b-2 < b$ であるから、これは矛盾。

したがって、①をそれぞれ b で割った余りはすべて異なる。

また、①には b の倍数が存在しないから、これらの余りはすべて0でない。

以上から、 $0, a, 2a, 3a, 4a, \dots, (b-1)a$ をそれぞれ b で割った余りはすべて異なる。(証明終)

参考 ※※の補足

各 A_n から「奇数ばかりの8個」を S の要素としてもよい。

5 (証明)

2色の積み木をいくつか積み上げてつくられる直方体で、縦の長さが a cm, 横の長さが b cm, 高さが c cm のものを「 $a \times b \times c$ の直方体」と表すことにする。すべての L は「 $3 \times 7 \times 127$ の直方体」である。また、 L を 127 個に分割してできる「 $3 \times 7 \times 1$ の直方体」を M , M を 7 個に分割してできる「 $3 \times 1 \times 1$ の直方体」を N とよぶ。

さらに、 M に対して、次の条件 1~3 をすべて満たす直方体を「よい四角形」と定義する。

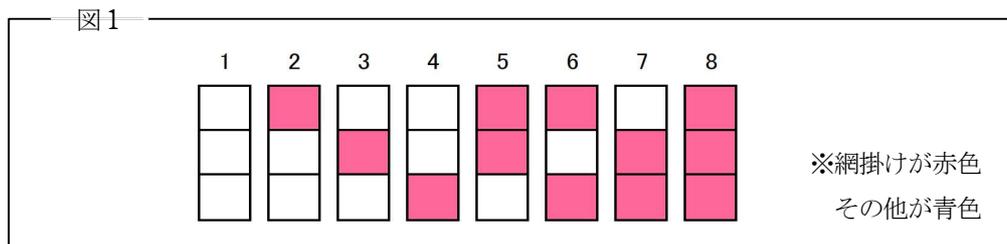
(条件 1) 直方体 M に含まれる積み木のいくつかでできている。

(条件 2) 縦と横の長さがともに 2 cm 以上である。

(条件 3) 4 つの隅の積み木がすべて同じ色である。

まず、どの M にも「よい四角形」が必ず存在することを示す。

N の色のパターンとしてありうるものは、図 1 の 1 番から 8 番までの 8 通りあるので、これらを「1 番の N 」「2 番の N 」……と順に名付ける。



M は 7 個の N に分割することができるが、これら 7 個の N の番号の中に重複がある場合は、その重複した番号の N 同士によって「よい四角形」ができる。重複がない場合は「1 番と 2 番」または「7 番と 8 番」の少なくとも一方の N のペアは必ず存在するので、そのペアで「よい四角形」ができる。

したがって、どの M にも「よい四角形」が必ず存在する。

ここで、2 個の M に対して「よい四角形が等しい」と「よい四角形が異なる」を次のように定義する。

2 個の M を重ねてできる $3 \times 7 \times 2$ の直方体について、互いの「よい四角形」で、8 つの隅の積み木がすべて同じ色である高さ 2 cm の直方体ができるとき、この 2 個の M は「よい四角形が等しい」と定義し、できないときは「よい四角形が異なる」と定義する。

次に、すべての L に対して、その L を分割してできる 127 個の M のうち少なくとも 2 個の M は「よい四角形が等しい」ことを示す。

「よい四角形」について 4 つの隅の積み木の位置と色に注目すると、位置の決め方が ${}_3C_2 \times {}_7C_2 = 3 \times 21 = 63$ 通り、色の決め方が 2 通りあるので、位置と色の決め方は全部で $63 \times 2 = 126$ 通りある。このことから、互いに「よい四角形が異なる」ような M は最大で 126 個存在することがわかる。

ところが、いま 127 個の M があるので、少なくとも 2 個の M は「よい四角形が等しい」。

したがって、すべての L に対して、その L を分割してできる 127 個の M のうち少なくとも 2 個の M は「よい四角形が等しい」。

「よい四角形が等しい」ような 2 個の M で「よい直方体」ができるので、 L は必ず「よい直方体」を含む。

(証明終)