

平成30年度

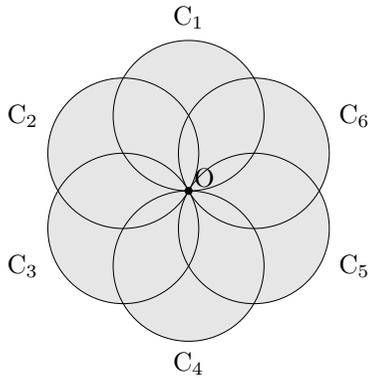
京都・大阪数学コンテスト

注 意 事 項

1. 問題は1ページから6ページまであります。
2. 解答用紙は、全部で5枚あります。
3. あなたのコンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は、問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお、問題番号 $\boxed{1}$ については答えのみを、問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については答えのみでなく考え方等も記入してください。(問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については、考え方等も採点対象となります。)
5. 解答時間は3時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

1 次の各問いに答えなさい。

- (1) 点 O を通る半径 1 の円 C_1 がある。点 O を中心として円 C_1 を反時計回りに 60° 回転させた円を C_2 とする。また、点 O を中心として円 C_2 を反時計回りに 60° 回転させた円を C_3 とする。同様に、円 C_4, C_5, C_6 を作る。
6 つの円 $C_1 \sim C_6$ を貼り合わせてできる図形全体の面積を求めなさい。



- (2) 自然数 n に対し、7 倍して 2018 を引く操作を 3 回繰り返したところ、3 桁の自然数になった。
このとき、考えられる自然数 n をすべて求めなさい。

- (3) 中心が O , 半径が 10 の球がある。この球をある平面で切り, 切り口の円周上に 3 点 A , B , C をとると $AB = 5$, $BC = 4$, $CA = 3$ であった。
このとき, 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい。

- (4) あるクラスで 30 点満点のテストが行われた。このテストは 5 題からなり, 各問題に部分点はない。このテストを受けた A さんは, 5 題の配点を見たところ次の 2 つのことに気がついた。

- ・ 0 点, 1 点, 2 点, \dots , 30 点の点数のうち, 1 つの点数だけは, 5 題の問題でどのように正解・不正解を組み合わせても得点できない。
- ・ 残りの 30 種類の点数は, 正解・不正解を組み合わせることにより得点できる。

このテストで得点できない点数を答えなさい。また, 5 題の配点として考えられるものを 1 種類答えなさい。

2 Aさんは電卓に次のような細工をした。

1 から 9 までのある 2 つの数字 a, b ($a < b$) に対し, a のボタンを押せば値 b が入力され, b のボタンを押すと値 a が入力される。

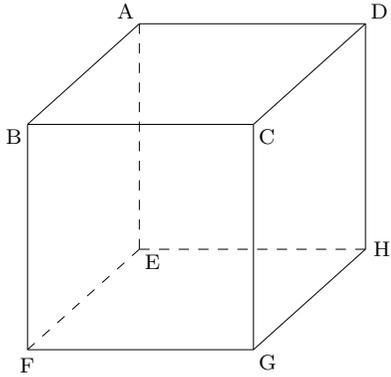
なお, a, b 以外のボタンを押せば, 押したボタンの値が入力される。

この電卓を用いて, Bさんがどの桁にも 0 を含まない 3 桁の自然数 m に対し, $m \times m$ を計算したところ, 正しい値より 10000 大きい値が出てしまった。

a, b の組 (a, b) と, 3 桁の自然数 m を求めなさい。

- 3 次の図のように 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。長方形 $AFGD$ を含む平面を P_1 , 長方形 $ABGH$ を含む平面を P_2 , 長方形 $BFHD$ を含む平面を P_3 とする。

立方体を 3 つの平面 P_1, P_2, P_3 で切断したとき, 切り分けてできる立体のうち点 E を含む立体の体積を求めなさい。



4 n を自然数とする。2つの国 A 国と B 国があり、それぞれの国には 1 番から n 番までの番号が割り振られた島がある。これらの島の間に関次の条件を満たすように橋をかける。

- ・ どの島にもちょうど 2 つの橋がかかる。
- ・ どの橋もちょうど 2 つの島を結ぶ。

このとき、どの島からもちょうど 2 回橋を渡って他方の国の同じ番号の島に移動できるような橋のかけ方が存在するために n が満たすべき必要十分条件を求めなさい。

- 5 円 O 上の異なる 2 点 A, B に対し、点 A, B における円 O の接線は点 P で交わるとし、線分 AB の中点を M とする。 $QB = PB$ となるように直線 PB 上に点 P と異なる点 Q をとり、直線 QA と円 O の交点のうち、点 A と異なる点を C とする。また、直線 CP と円 O の交点のうち、点 C と異なる点を D とし、直線 AD と直線 QM の交点を R とする。

このとき、 $\frac{QM}{RM}$ の値を求めなさい。

