平成30年度　京都・大阪数学コンテスト　略解

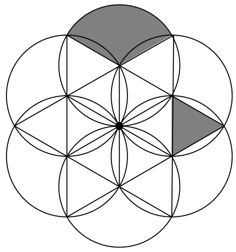
$\boxed{1}$　次の各問いに答えなさい。

(1) 右図のように補助線を引くと，1 辺の長さが 1 の正三角形が 12 枚と，中心角 120° のおうぎ形が 6 枚となる。

1 辺の長さが 1 の正三角形の面積は $\dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

中心角 120° のおうぎ形の面積は $1 \times 1 \times \pi \times \dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}\pi$

よって，求める面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 12 + \dfrac{1}{3}\pi \times 6 = 3\sqrt{3} + 2\pi$



(2)　n に対して，7 倍して 2018 を引く操作を 3 回繰り返すと，

$$7\{7(7n - 2018) - 2018\} - 2018 = 343n - 115026$$

したがって

$$100 \leqq 343n - 115026 < 1000$$

これを解くと

$$\frac{115126}{343} \leqq n < \frac{116026}{343}$$

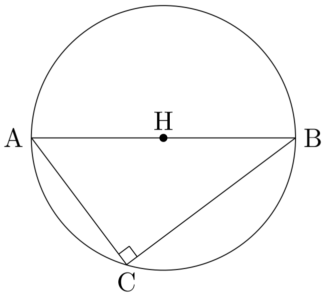
$335 < \dfrac{115126}{343} < 336$，$338 < \dfrac{115126}{343} < 339$ であるから，条件を満たす自然数 n は

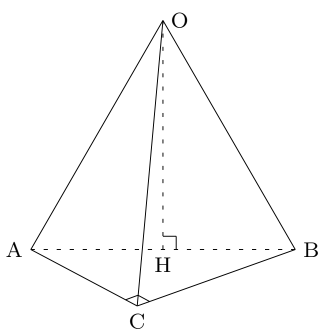
$n = 336, 337, 338$

(3)　$\triangle$ABC は直角三角形であり，AB は $\triangle$ABC の外接円の直径である。点 O から平面 ABC に下ろした垂線を OH とすると，H は辺 AB の中点である。

$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2$ より $\mathrm{OH} = \dfrac{5\sqrt{15}}{2}$ なので，求める体積を V とすると

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{5\sqrt{15}}{2} = 5\sqrt{15}$





(4) 配点が 1 点, 2 点, 4 点, 7 点, 16 点のとき 15 点は得点できず，他の点数は得点できる。
したがって，得点できない点数は 15 点，配点は 1 点, 2 点, 4 点, 7 点, 16 点

(参考)

[取ることのできない点数 x の求め方]
5 問の問題のうち何問かを選択して解くことで x 点を得られるとする。このとき，選択しなかった問題を解けば $30-x$ 点が得られる。
反対に，x 点を得られなければ $30-x$ 点を取ることはできない。したがって，たとえば 10 点を取ることができないとき，20 点を取ることもできないので問題の条件に反する。
よって条件を満たす可能性があるのは，$x=30-x$ となる $x=15$ のときである。

[配点の求め方]
問題それぞれについて正解・不正解の 2 通りがあるから，5 問の正解・不正解の仕方は $2^5=32$ 通りである。
ここで，x 点 $(1 \leqq x \leqq 14)$ が n 通りの方法で取れるとき，$30-x$ 点も n 通りの方法で取れるから，30 種類の点をとるためには，複数のとり方のある点は 14 点以下の 1 つと 16 点以上の 1 つのみであり, それはともに 2 通りのとり方しかないことがわかる。
以下，条件を満たす配点 a, b, c, d, e $(a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e)$ が存在すると仮定して考える。
　1 点は取得可能だから，$a=1$ である。
　2 点は取得可能だから，$b=1$ か $b=2$ である。
　$b=1$ のとき,「a と b」「$a+c$ と $b+c$」「$a+d$ と $b+d$」「$a+e$ と $b+e$」のように，複数の取り方がある点が 3 つ以上あるので不適である。
　したがって $b=2$
　同様に，同じ配点の問題は存在しない。$\cdots(*)$
　$c=3$ のとき,「$a+b$ と c」「$a+b+d$ と $c+d$」「$a+b+e$ と $c+e$」のように，複数の取り方がある点が 3 つ以上あるので不適である。
　したがって $c \geqq 4$ であり，4 点は取得可能だから $c=4$
　同様に $a+c=d,\ b+c=d$ のような「2 問の配点の和と等しくなる配点の問題」は存在しない。$\cdots(**)$
　$(*),\ (**)$ より $d \neq 4,\ 5,\ 6$
　さらに 15 点は取得不可能だから $d \neq 8$
　8 点は取得可能だから $d=7$
　$e=30-(a+b+c+d)=16$
　$a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=7,\ e=16$ は条件を満たす。
以上から配点は「1 点，2 点，4 点，7 点，16 点」

※求め方から分かるように, 条件を満たす 5 題の配点の組合せは, この 1 組のみである。

$\boxed{2}$ 電卓によって入力された値を n とすると，条件より

$$n^2 - m^2 = 10000$$

左辺を因数分解して

$$(n+m)(n-m) = 10000$$

n，m は 3 桁の数であることに注意すると，$200 < n+m < 2000$（$n = m = 100$ は条件を満たさないことは明らか) であり，また，n，m は自然数であるから，$n+m$，$n-m$ の偶奇は一致する。さらに $n+m > n-m$ も考慮すると，$(n+m, n-m)$ の組の候補は

$$(n+m, n-m) = (250, 40), (500, 20), (1000, 10), (1250, 8)$$

このとき，

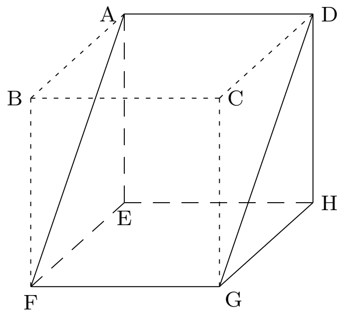
$$(n, m) = (145, 105), (260, 240), (505, 495), (629, 621)$$

となる。このうち，条件を満たすものは $(n, m) = (629, 621)$ である。

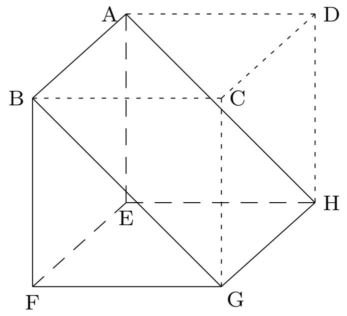
このとき，$(a, b) = (1, 9)$ であり，$m = 621$ である。

$\boxed{3}$　ABCD-EFGH を平面 P_1, P_2 で切断したとき, E を含む図形は四角錐 A−EFGH となる。また, その体積 V_1 は

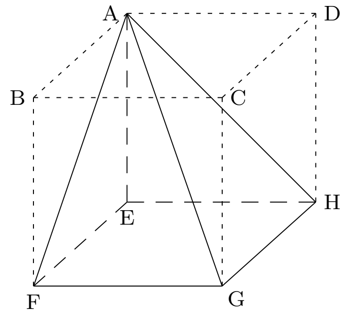
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$



P_1で切断



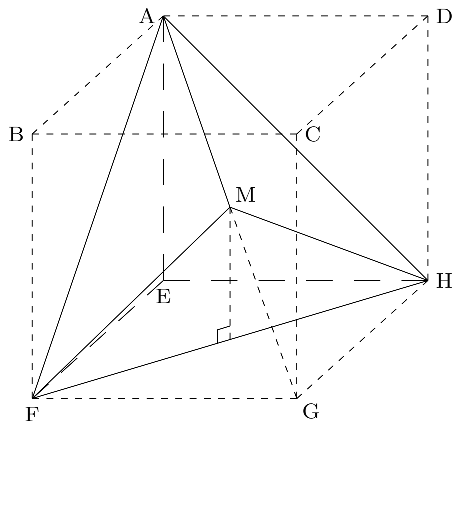
P_2で切断



P_1, P_2で切断

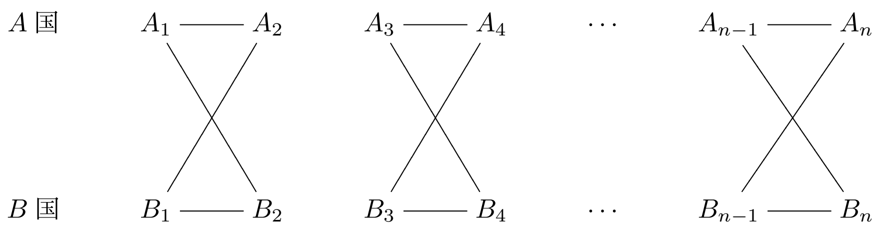
これを平面 P_3 で切断するとき, 平面 P_3 は AG の中点 M を通ることから, 求める体積を V とすると

$$V = V_1 - (\text{三角錐 M} - \text{FGH}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



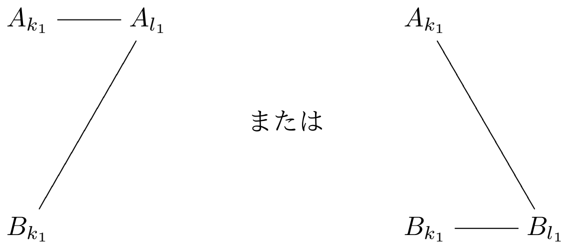
$\boxed{4}$　A 国の k 番目の島を A_k, B 国の k 番目の島を B_k とおく。

(i)　n が偶数のときは次の図のように橋をかければよい。

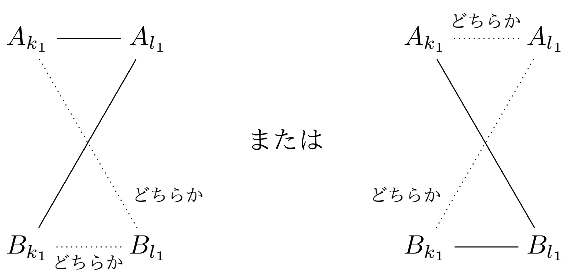


(ii)　n が奇数のとき, 条件を満たす橋のかけ方が存在すると仮定して矛盾を導く。

1 以上 n 以下の自然数 k_1 に対し, A_{k_1} から B_{k_1} に橋をちょうど 2 回渡って移動できることから，ある番号 l_1 の島と A_{k_1}，B_{k_1} の間にそれぞれ橋がかかっている。



A_{l_1} から B_{l_1} にも橋をちょうど 2 回渡って移動できることと島から出る橋がちょうど 2 本であることから，下の図のように，番号 k_1 の島と A_{l_1}，B_{l_1} の間にそれぞれ橋がかかっている。



このとき,

　番号 k_1 の島から番号 k_1 の島に移動するには番号 l_1 の島を経由する

　番号 l_1 の島から番号 l_1 の島に移動するには番号 k_1 の島を経由する

ことになる。

　また，k_1 でも l_1 でもない番号 k_2 に対し， 番号 k_2 の島から番号 k_2 の島に移動するのに k_1 や l_1 の番号の島を経由することはない。よって，番号 k_2 の島から番号 k_2 の島に移動するには，新しい番号 l_2 の島を経由することになる。

　以下これを繰り返すと, 番号のペア $(k_1, l_1), (k_2, l_2), \ldots$ ができる。n が奇数のとき，これは不可能である。したがって，n が奇数のときには条件を満たす橋のかけ方は存在しない。

　ゆえに，求める必要十分条件は，n が偶数であることである。

$\boxed{5}$　直線 QM と直線 AP の交点を S とする。まず, 線分 BP の中点を N とすると, 直線 NM と直線 PA は平行で, さらに QN : NP = 3 : 1 なので QM : MS = 3 : 1 である。また, 三角形 APB と直線 QS でメネラウスの定理を使うことで,

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QP}} \cdot \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}} = 1$$

よって

$$\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}} = 2$$

となるので, PS : SA = 2 : 1 である。

次に, 直線 AD と直線 BP の交点を T として, BP : BT の比を求める。方べきの定理より

$$\mathrm{CP} \cdot \mathrm{PD} = \mathrm{BP}^2$$
$$\mathrm{CP} \cdot \mathrm{PD} = 2\mathrm{BP} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{BP}$$
$$\mathrm{CP} \cdot \mathrm{PD} = \mathrm{QP} \cdot \mathrm{NP}$$

なので, 方べきの定理の逆より 4 点 C, D, N, Q は同一円周上にある。 四角形 CDNQ は円に内接する四角形だから

$$\angle\mathrm{DNQ} = \angle\mathrm{DCA}$$

であり, 接弦定理より

$$\angle\mathrm{DCA} = \angle\mathrm{DAP}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{DNQ} = \angle\mathrm{DAP}$$

となるので, 4 点 A, D, N, P は同一円周上にある。よって, 方べきの定理より, $\mathrm{TN}\cdot\mathrm{TP} = \mathrm{TD}\cdot\mathrm{TA}$ となり, $\mathrm{TN}\cdot\mathrm{TP} = \mathrm{TB}^2$ となる。ここで $\mathrm{TN}\cdot\mathrm{TP} = \left(\frac{\mathrm{BP}}{2} - \mathrm{BT}\right)(\mathrm{BP} - \mathrm{BT})$ なので, $x = \frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{BP}}$ とおけば,

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)(1 - x) = x^2$$

であり, これより $x = \frac{1}{3}$ となる。よって BP : BT = 3 : 1 である。

最後に, QR : QS の比を求める。BP : BT = 3 : 1 と BP = BQ から TQ : QP = 2 : 3 であるから, 三角形 ATP と直線 QS でメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RT}} \cdot \frac{\mathrm{TQ}}{\mathrm{QP}} \cdot \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SA}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RT}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

よって

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RT}} = \frac{3}{4}$$

これより AT : TR = 7 : 4 である。次に三角形 ARS と直線 PQ でメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TR}}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QS}}\cdot\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PA}}=1$$
$$\frac{7}{4}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QS}}\cdot\frac{2}{3}=1$$
$$\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QS}}=\frac{6}{7}$$

以上より $\mathrm{QR}=\frac{6}{7}\mathrm{QS}$ である。

QM : MS = 3 : 1 だったので $\mathrm{QS}=\frac{4}{3}\mathrm{QM}$ であり,$\mathrm{RM}=\mathrm{QR}-\mathrm{QM}=\frac{1}{7}\mathrm{QM}$ となる。

したがって $\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{RM}}=7$ である。