平成２９年度

京都・大阪数学コンテスト

注　意　事　項

1. 問題は 1 ページから 6 ページまであります。
2. 解答用紙は, 全部で 5 枚あります。
3. あなたのコンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は，問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお, 問題番号$\boxed{1}$ については答えのみを, 問題番号$\boxed{2}$ ~$\boxed{5}$ については答えのみでなく考え方等も記入してください。（問題番号$\boxed{2}$ ~$\boxed{5}$ については, 考え方等も採点対象となります。）
5. 解答時間は 3 時間です。なお, トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

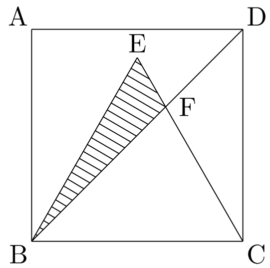
$\boxed{1}$　次の各問いに答えなさい。

(1)　2017 の後ろに自然数 1, 2, 3, $\cdots$, 9, 10, 11, $\cdots$ をつけて, 次のような数の列を作る。

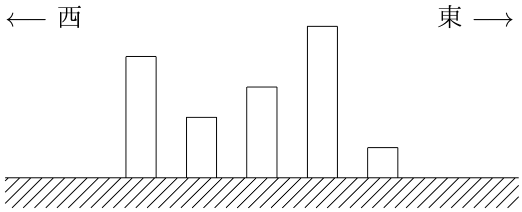
$$20171,\ 20172,\ 20173,\ \cdots,\ 20179,\ 201710,\ 201711,\ \cdots$$

この列に現れる数のうち, 29 の倍数となる最小の数を求めなさい。

(2)　右の図のように, 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD と正三角形 EBC があり, 点 E は正方形 ABCD の内部にある。線分 BD と線分 CE との交点を F とするとき, $\triangle$EBF の面積を求めなさい。



(3)　高さがそれぞれ 10m, 20m, 30m, 40m, 50m である 5 棟のビルを, 例えば下の図のように東西方向に一直線に並べて建てることを考える。



ビルの屋上に立って東西方向の景色を見るとき, 東または西の方角に自分のいるビルより高いビルがあると, その方角の景色を見ることができないことにする。

どのビルの屋上から見ても, 東または西のうち少なくとも 1 つの方角の景色を見ることができるビルの建て方は全部で何通りあるか求めなさい。

(4)　図 1 のように正方形 ABCD があり，対角線の交点を E とする。2 から 10 までの自然数をそれぞれ 1 回ずつ点 A, B, C, D, E のいずれかに割り当てる。△ABE, △BCE, △CDE, △DAE それぞれについて, 3 つの頂点に割り当てられたすべての自然数の積を内部に書く。これら 4 つの数がすべて等しくなるような, 自然数の割り当て方を 1 つ答えなさい。ただし, 点 A, B, C, D, E にはそれぞれ少なくとも 1 つの自然数を割り当てなければならない。

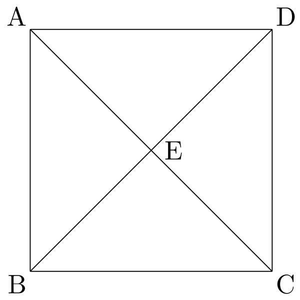


図 1

※例えば

A に割り当てられた自然数が [2, 3]
B に割り当てられた自然数が [4, 5, 6, 7]
C に割り当てられた自然数が [8]
D に割り当てられた自然数が [9]
E に割り当てられた自然数が [10]

の場合，図 **2** のようになる。
この例では, **4** つの三角形の内部に書かれた数は異なる。

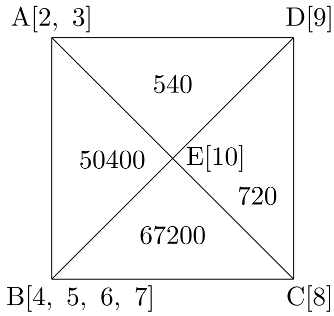


図 2

$\boxed{2}$　図 1 のように, 正三角形を 9 個の同じ大きさの正三角形に分割したものを考える。また, 図 1 のように点 G をとる。

分割された小さな 9 個の正三角形に, 1 から 9 までの自然数をちょうど 1 つずつ割り当てる。図 2 はその一例である。この自然数を割り当てた最初の状態を, 状態 A とする。

図 3 のように, 状態 A を点 G を中心として時計回りに 120° 回転したものを状態 B , さらに状態 B を時計回りに 120° 回転したものを状態 C とする。

図 4 のように, 状態 A , B , C の正三角形を平行移動して重ね合わせたとき, 同じ位置にある 3 つの小さな正三角形について, それぞれに割り当てられた自然数を合計する。

このとき, 合計がすべて等しくなるような自然数の割り当て方は全部で何通りあるか求めなさい。ただし, 回転により重なり合うものは同一の割り当て方として数えることとする。

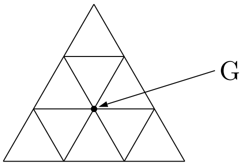


図 1

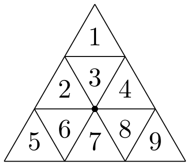


図 2（状態 A）

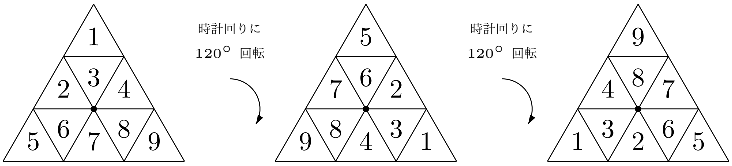


図 3

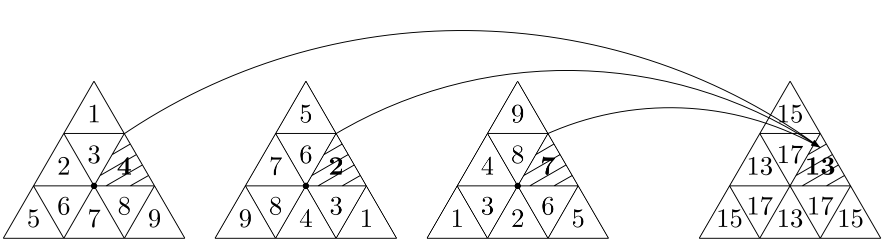
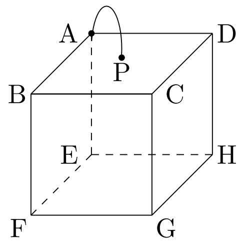


図 4

※この例では, 小さな正三角形ごとの合計は異なる。

$\boxed{3}$　右の図のように, 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD–EFGH に, 一端が頂点 A に固定された長さ $\sqrt{2}$ のひもが付いている。ひもの両端のうち, A でない方を P とし, P は立方体の表面上を動くものとする。



　このとき, P が動くことのできる部分の面積 S を求めなさい。ただし, ひもは立方体の内部には入れないものとする。

$\boxed{4}$ 円 O の円周上に, 異なる 3 点 A , B , C をとり, $\angle$BAC の二等分線と円 O との交点のうち, 点 A でない方の点を D とする。

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = \mathrm{AD}$$

が成り立つとき, $\angle$BAC の大きさを求めなさい。

$\boxed{5}$ $p,\ q,\ r$ を素数, n を自然数とする。

$$p^2 = q^2 + r^n$$

を満たす $p,\ q,\ r,\ n$ の組 $(p,\ q,\ r,\ n)$ をすべて求めなさい。