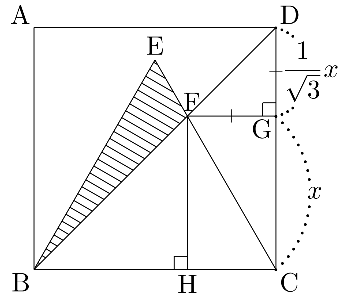
平成29年度　京都・大阪数学コンテスト　略解

$\boxed{1}$ (1)　20171 を 29 で割ると，余りは 16 である。20172, 20173, ... , 20179 を 29 で割った余りは 16 から 1 ずつ増えていくから 17, 18, ... , 24 となるので，20171 から 20179 までに 29 の倍数はない。

次に 201710 を 29 で割ると，余りは 15 である。201711, 201712, ... を 29 で割った余りは 15 から 1 ずつ増えていくから 16, 17, ... となるので，29 の倍数となる最小の数は 201710 に 14 を足した 201724 である。

(2)　点 F から 辺 CD に垂線 FG を下ろし，$\mathrm{GC}=x$ とする。また，点 F から 辺 BC に垂線 FH を下ろす。



このとき $\mathrm{FG}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{GC}$ より $\mathrm{FG}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$　また $\mathrm{GD}=\mathrm{FG}$ より $\mathrm{GD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

したがって $\mathrm{GC}+\mathrm{GD}=\mathrm{CD}$ より $x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=1$

よって $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

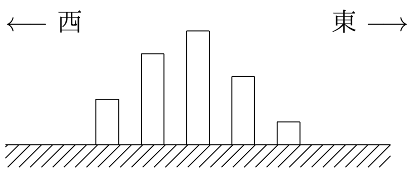
$\mathrm{FH}=\mathrm{GC}=x$ なので，$\triangle\mathrm{FBC}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{FH}=\dfrac{1}{2}\times1\times x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

$\triangle\mathrm{EBC}$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形なので，高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $\triangle\mathrm{EBC}=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

以上から $\triangle\mathrm{EBF}=\triangle\mathrm{EBC}-\triangle\mathrm{FBC}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

(3)　もっとも高いビルより東側は東へ行くほど低いビルが，また，西側は西へ行くほど低いビルが並ぶ。



したがって，残る 4 棟のビルを東側と西側に分ける場合ごとに東側と西側のビルの配置はそれぞれ 1 通りに決まるので，求める建て方の数は $2^4=16$ 通り。

（別解）

高いビルから順番に建てていく。

50m のビルを建てる方法は 1 通り

40m のビルを建てる方法は，50m のビルの東側か西側に建てるので 2 通り

30m のビルを 50m のビルと 40m のビルとの間に建てると，30m のビルからは東西どちらの方角の景色も見ることができない。したがって 30m のビルはビル 2 棟の東側かビル 2 棟の西側に建てるので 2 通り

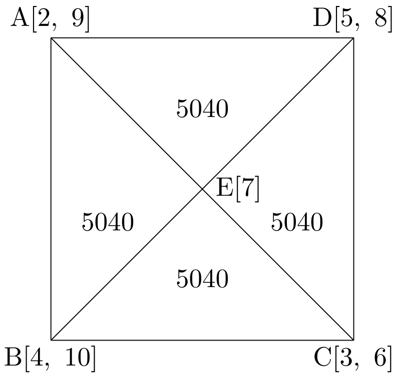
同様に 20m と 10m のビルも, すでに建っているすべてのビルの東側か, すべての西側に建てるのでそれぞれ 2 通り

以上から求める建て方の数は $2^4=16$ 通り

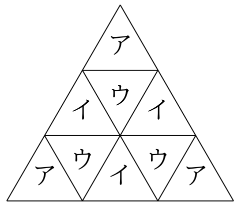
(4)　2 以上 10 以下の自然数で 7 の倍数は 7 のみであるから，7 は E に割り当てなければならない。

次に，点 A, B, C, D, E に割り当てられた数の積をそれぞれ a, b, c, d, e とすると, △ABE と △BCE に書かれた積が等しいから $abe = bce$ より $a = c$ である。同様に $b = d$ がいえる。また逆に， $a = c$ と $b = d$ が成り立てば，問題文の条件を満たす。

このように考えていくと，割り当て方は例えば次のようになる。



$\boxed{2}$ 回転により重なる部分を考えると，右の図の 3 カ所のアに割り当てる数の合計と，3 カ所のイに割り当てる数の合計と，3 カ所のウに割り当てる数の合計が一致する。1 から 9 までの和は 45 であることから，ア，イ，ウの数の合計がそれぞれ 15 となるように数を割り当てればよい。



ここで和が 15 となるような 1 から 9 までの異なる自然数 3 つの数の組をすべて挙げると, 以下の通りである。

(1, 5, 9), (1, 6, 8), (2, 4, 9), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (4, 5, 6)

これらから, 数が重複しないように 3 つの組を選べばよいが，そのような選び方は

(A) (1, 5, 9) − (2, 6, 7) − (3, 4, 8)

(B) (1, 6, 8) − (2, 4, 9) − (3, 5, 7)

の 2 通りしか存在しない。

(A) (B) いずれの場合も，3 つの組をア，イ，ウに割り当てる方法は $3! = 6$ 通りずつある。それぞれの場合について，各組に含まれる 3 つの数を 3 つの場所に割り当てる方法は $3! = 6$ 通りずつある。

回転により同じになる数の割り当て方が 3 つずつあることに注意すると，(A) (B) いずれの場合にも 9 つの数を割り当てる方法は，$3! \times (3! \times 3! \times 3!) \div 3 = 432$ 通りとなる。

したがって求める場合の数は $432 \times 2 = 864$ 通り。

$\boxed{3}$ 立方体 ABCD–EFGH の展開図において，点 P の通過できる範囲は図 1 の斜線部分になる。

図 2 は図 1 の一部分を取り出したものである。A のうち左下にある点を便宜上 A' とし，2 つの円弧の交点を I とすると，図 2 の斜線部分の面積 S' は

$$S' = (\text{扇形 ACI}) + \triangle\mathrm{ABI} - \triangle\mathrm{ABC}$$

で求められる。

I は A を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にあるので AI= $\sqrt{2}$ となる。同様に $\mathrm{A'I}=\sqrt{2}$ となる。さらに AA' は 1 辺の長さが 1 の正方形の対角線であるから $\mathrm{AA}'=\sqrt{2}$ となる。したがって $\triangle\mathrm{A'AI}$ は正三角形であり，$\angle\mathrm{A'AI}=60^\circ$ となる。

$\angle\mathrm{A'AC}=90^\circ$ なので，扇形 ACI は半径が $\sqrt{2}$，中心角が 30° である。よって (扇形 ACI)$=\left(\sqrt{2}\right)^2\times\pi\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi}{6}$

また $\triangle\mathrm{ABI}$ について，$\triangle\mathrm{ABI}\equiv\triangle\mathrm{A'BI}$ であり，さらに $\triangle\mathrm{A'AI}=\triangle\mathrm{A'AB}+\triangle\mathrm{A'BI}+\triangle\mathrm{ABI}$ であるから $\triangle\mathrm{ABI}=\dfrac{1}{2}\left(\triangle\mathrm{A'AI}-\triangle\mathrm{A'AB}\right)$ となる。$\triangle\mathrm{A'AI}$ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形なので $\triangle\mathrm{A'AI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，また $\triangle\mathrm{A'AB}=\dfrac{1}{2}$ なので $\triangle\mathrm{ABI}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

さらに $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}$

以上から $S'=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}-9}{12}$ なので，$S=3+6S'=3+\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}-9}{2}=\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}-3}{2}$

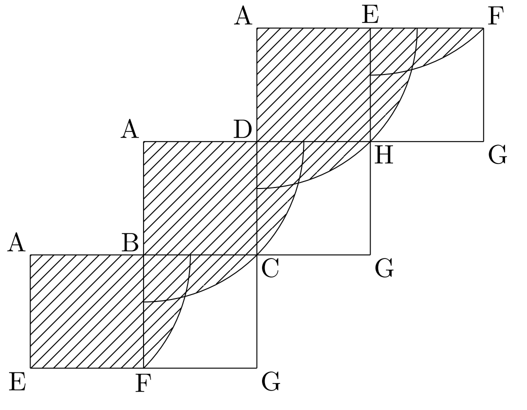


図 1

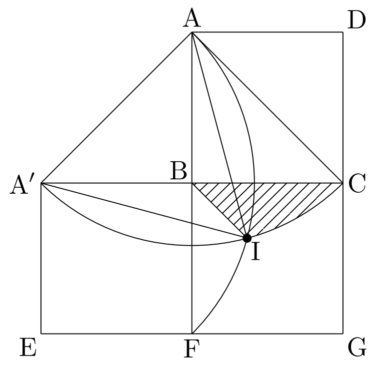
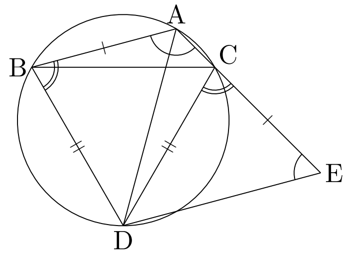


図 2

$\boxed{4}$ 右の図のように，辺 AC の延長線上に点 E を AB=CE となるようにとる。

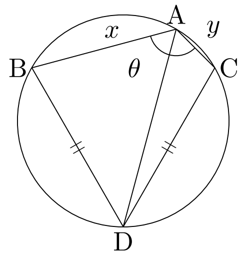


まず，$\triangle$ABD $\equiv$ $\triangle$ECD を示す。$\angle$BAD=$\angle$CAD より，BD=CD である。また AB=EC である。四角形 ABDC は円 O に内接しているため，$\angle$ABD=$\angle$ECD である。2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，$\triangle$ABD $\equiv$ $\triangle$ECD である。これより，AD=ED を得る。

さらに AE=AC+CE=AC+AB=AD であるから，$\triangle$ADE は正三角形である。よって $\angle\text{CAD} = 60^\circ$

したがって $\angle$BAC=2$\times\angle$CAD=120°

（別解 1 ）



$\angle$BAD=θ，AB= x，AC= y とおく。AD= $x+y$ であり，また $\angle$BAD=$\angle$CAD より，BD=CD である。

$\triangle$ABD に余弦定理を用いて $\text{BD}^2 = x^2 + (x+y)^2 - 2x(x+y)\cos\theta$

また $\triangle$ACD に余弦定理を用いて $\text{CD}^2 = y^2 + (x+y)^2 - 2y(x+y)\cos\theta$

BD=CD なので $x^2+(x+y)^2-2x(x+y)\cos\theta = y^2+(x+y)^2-2y(x+y)\cos\theta$

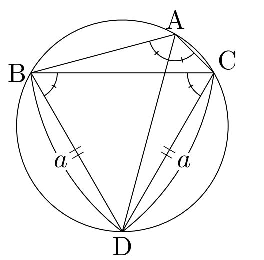
整理して $(x+y)(x-y)(2\cos\theta-1) = 0$

$x, y > 0$ であるから $x-y=0$ または $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$x-y=0$ のとき，AD は円 O の直径であり $\angle\text{ABD}= 90^\circ$ となる。したがって $\cos\theta = \dfrac{\text{AB}}{\text{AD}} = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ より $\theta = 60^\circ$ となり，$\angle\text{BAC}= 2\theta = 120^\circ$

（別解 2 ）



$\angle\text{CAD} = \angle\text{BAD}$ より，$\text{BD} = \text{CD}$（$= a$ とおく）$\cdots$①

四角形 ABDC は円に内接するので，トレミーの定理より

$\text{AB}\cdot\text{CD} + \text{AC}\cdot\text{BD} = \text{AD}\cdot\text{BC}$ が成り立つが，

① より $a(\text{AB}+\text{AC}) = \text{AD}\cdot\text{BC}$

さらに，与えられた条件より $\text{AB}+\text{AC} = \text{AD}$ なので，$\text{BC} = a\cdots$②

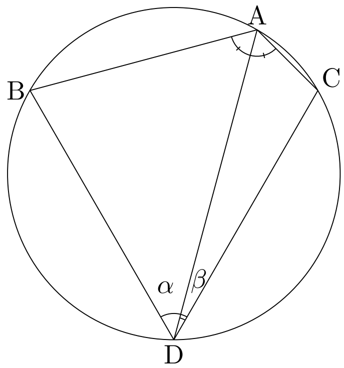
①, ② から，$\triangle$BCD は正三角形となるから，$\angle\text{BDC} = 60^\circ$

四角形 ABDC は円に内接する四角形で，$\angle$BAC は $\angle$BDC の対角なので，

$\angle\text{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ となる。

（別解３）

四角形 ABDC の外接円の半径を R とする。$\angle \mathrm{ADB} = \alpha$, $\angle \mathrm{ADC} = \beta$ とおく。



$\triangle$ABD において正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\alpha} = 2R$ なので，$\mathrm{AB} = 2R\sin\alpha$

同様に $\triangle$ACD において正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\beta} = 2R$ なので，$\mathrm{AC} = 2R\sin\beta$

また，円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (\alpha+\beta)$

線分 AD は $\angle$BAC を二等分するから，$\angle \mathrm{BAD} = 90^\circ - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

よって，
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ABD} &= 180^\circ - \angle \mathrm{ADB} - \angle \mathrm{BAD} \\ &= 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

再び $\triangle$ABD で正弦定理を用いると，

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)} = 2R$ より $\mathrm{AD} = 2R\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2R\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = \mathrm{AD}$ が成り立つから，$2R\sin\alpha + 2R\sin\beta = 2R\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ より，$\sin\alpha + \sin\beta = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

三角関数の和を積に変換する公式を用いて，$2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$ より，$-90^\circ < \dfrac{\alpha-\beta}{2} < 90^\circ$ なので $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \fallingdotseq 0$ に注意して，

$2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 1$ より $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \alpha+\beta < 180^\circ$ より $0^\circ < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < 90^\circ$ なので $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 30^\circ$，すなわち $\alpha+\beta = 60^\circ$

したがって，$\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

[参考]　別解は高校で学習する三角比，三角関数，およびトレミーの定理を用いた解法である。参考として掲載したので，興味がある人は各自で学習を進めてほしい。

$\boxed{5}$ $p^2-q^2=r^n$ より，$p>q$ である。また $(p+q)(p-q)=r^n$
r は素数なので

$$p+q=r^m,\ p-q=r^l\ (m,\ l\text{ は整数},\ m>l\geqq 0,\ m+l=n)$$

と書ける。ただし $r^0=1$ とする。したがって，

$$2p=(p+q)+(p-q)=r^m+r^l=r^l(r^{m-l}+1)$$
$$2q=(p+q)-(p-q)=r^m-r^l=r^l(r^{m-l}-1)$$

$l\geqq 2$ のとき， $2p=r^l(r^{m-l}+1)$ の左辺と右辺を素因数分解したとき現れる素数の数に注目すると，左辺が 2 つであるのに対し右辺は 3 つ以上であるので不適。よって $l=0$ または 1 である。

[1] $l=0$ のとき，$p-q=1$ で $p,\ q$ は素数なので，$p=3,\ q=2$ が必要である。このとき $r^n=p^2-q^2=5$ なので $r=5,\ n=1$ である。実際に $(p,q,r,n)=(3,2,5,1)$ は解である。

[2] $l=1$ のとき，

$$2p=r(r^{m-1}+1),\ 2q=r(r^{m-1}-1)$$

である。

$r\neq 2$ であると仮定する。このとき r と 2 は互いに素となる。$2p=r(r^{m-1}+1)$ について，右辺は r の倍数なので左辺の $2p$ も r の倍数である。r と 2 は互いに素なので p は r の倍数となるが，p,r は素数なので $p=r$ となる。同様に $2q=r(r^{m-1}-1)$ について考えると $q=r$ が言えるので $p=q$ となるが，これは $p>q$ であることに矛盾する。よって $r=2$ が必要である。

$r=2$ のとき，$p=2^{m-1}+1, q=2^{m-1}-1$ となるので，$q, 2^{m-1}, p$ は連続する 3 つの整数である。したがって $q, 2^{m-1}, p$ のいずれかは 3 の倍数であり，2^{m-1} は 3 の倍数ではないので，p または q は 3 の倍数。一方 p,q は素数なので 3 の倍数なら 3 自身であるから p または q は 3 である。

$p=3$ のとき，$q=1$ となり q が素数にならないので不適。

$q=3$ のとき，$m=3,\ p=5$ であるから，$n=4$ となる。実際に $(p,q,r,n)=(5,3,2,4)$ は解となる。

[1][2] より，求める解は $(p,q,r,n)=(3,2,5,1),(5,3,2,4)$ のみである。

[参考] この略解にある $r^0=1$ という式は，高校で学習する指数の拡張を用いている。興味がある人は各自で学習を進めてほしい。