京都•大阪数学コンテスト2014　略解

$\boxed{1}$ (1)　図1において，$x=\mathrm{AB}$，$y=\mathrm{AC}$，$z=\mathrm{BC}$ とおき，△ABC の内接円の半径を r とおく。△DBA，△DAC，△ABC は相似な三角形なので，$x:y:z=3:4:r$，すなわち，$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{r}$ が成り立つ。

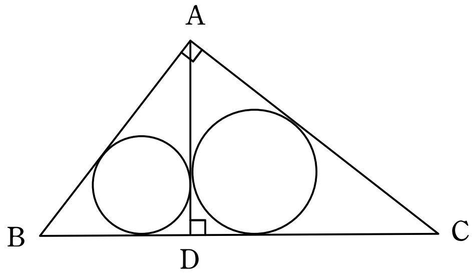


図1

$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{r}=k$ とおくと，$x=3k$，$y=4k$，$z=rk$ ……… ①

△ABC は $\angle \mathrm{A}=90°$ の直角三角形なので，三平方の定理より $z^2=x^2+y^2$ が成り立つ。これに①を代入して，$(rk)^2=(3k)^2+(4k)^2$

$k \fallingdotseq 0$ であるから，$r^2=3^2+4^2=25$

$r>0$ であるから，$r=5$　……… ②

次に図2のように，△ABC の内接円と辺 AB，BC，CA の接点をそれぞれ P，Q，R とし，$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=a$，$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=b$ とおく。

$\mathrm{AP}=\mathrm{AR}=5$ かつ $\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=3:5:4$ より

$$\frac{5+a}{3}=\frac{a+b}{5}=\frac{5+b}{4}$$

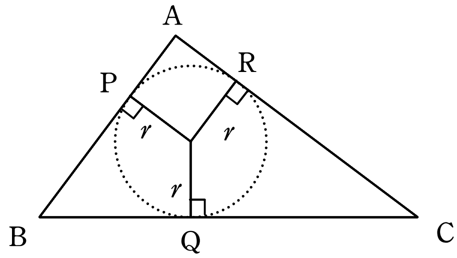


図2

これを解くと $a=10$，$b=15$ となるので，$\mathrm{BC}=a+b=25$　……… 答

別解　図1において，△ABD と △CAD は相似であり，これらの内接円の半径の比が相似比となる。よって，

$\mathrm{BD}:\mathrm{AD}=\mathrm{AD}:\mathrm{CD}=3:4$　……… ①

ここで，$\mathrm{BD}=3k$，$\mathrm{AD}=4k$（k は正の実数）とおくと，

三平方の定理より，$\mathrm{AB}=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$ となる。

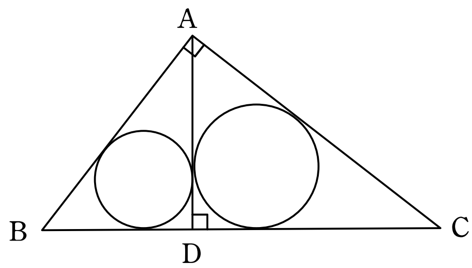


図1

△ABD の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{BD}\times\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\times 3k\times 4k=6k^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

一方，△ABD の内接円の中心を I とし，図2のように3つの三角形に分けて面積を考えると，

$$S=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBD}+\triangle\mathrm{IDA}$$
$$=\frac{1}{2}\times 5k\times 3+\frac{1}{2}\times 3k\times 3+\frac{1}{2}\times 4k\times 3=18k \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

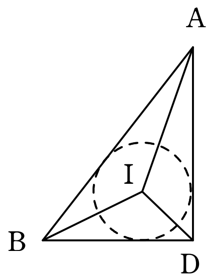


図2

②，③から，$6k^2=18k$，$k>0$ より，これを解くと $k=3$

よって，$\mathrm{BD}=9$，$\mathrm{AD}=12$ となり，①より $\mathrm{CD}=16$ となる。

したがって，$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=9+16=25$　……… 答

(2)　$c=30-(a+b)$，$0<c\leqq 20$ より，$0<30-(a+b)\leqq 20$，ゆえに，$10\leqq a+b<30$

したがって，求める正の整数の組（a，b，c）の個数は，

連立不等式

$$\begin{cases} 0<a\leqq 20 \\ 0<b\leqq 20 \\ 10\leqq a+b<30 \end{cases}$$

で表される領域にある格子点の個数に等しい。

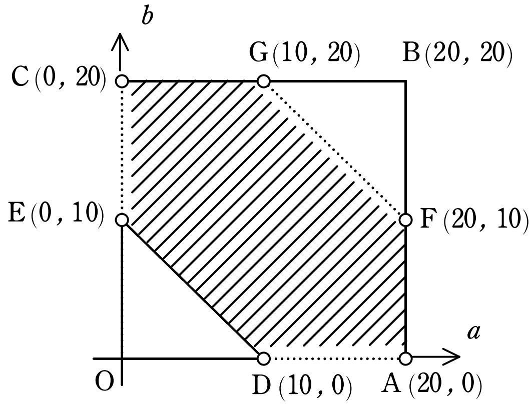
この領域を図示すると，右の図の斜線部分となる。

ただし，境界線については，図中の線分 DA，FG, CE 上の点を含まず，それ以外の点は含む。

右の図から格子点の個数は,

$$21^2-2\times\frac{10\times 11}{2}-3\times 11=298 \text{ 個}$$

したがって，求める正の整数の組（a，b，c）の個数は，298 個 ……… 答



(3)　記号「～」は，両辺の数をそれぞれ割り切れなくなるまで 10 で割り続けて得られる正の整数について，下 2 桁の数が同じになる，という意味で使うことにする。

例えば，1300～13，201～1 となる。一般に正の整数 x に対して，$10x \sim x$ が成り立つ。

また，一の位が 0 でない正の整数 x，y，z に対しては，$(100+x)\sim x$ や $(x+100y)z \sim xz$ が成り立つ。

これらの性質に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}
19\cdot 18\cdots 2\cdot 1 &= (19\cdot 11)\cdot 18\cdot(17\cdot 13)\cdot(16\cdot 14)\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot(15\cdot 12)\cdot 10\cdot(5\cdot 2)\\
&\sim 209\cdot 18\cdot 221\cdot 224\cdot 88\cdot 180\\
&\sim 9\cdot 18\cdot 21\cdot 24\cdot 88\cdot 18\\
&= 9\cdot(18\cdot 21)\cdot(24\cdot 88)\cdot 18\\
&\sim 9\cdot 78\cdot 12\cdot 18\\
&\sim 9\cdot 36\cdot 18\\
&= 5832
\end{aligned}$$

したがって，求める答えは 32 ……… 答

別解　19! は 5^3 を因数にもつが 5^4 を因数にもたないので，求めるのは $\frac{19!}{10^3}$ の下 2 桁の数である。

2 つの正の整数 a，b に対して，それぞれを 100 で割った余りが等しいとき「 $a\equiv b \pmod{100}$ 」と表す。

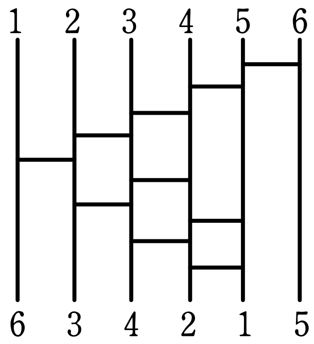
このとき，$(a+100)\equiv a \pmod{100}$ ，$(a+1000)\equiv a \pmod{100}$ などが成り立つことを利用すると，

$7\cdot 11\cdot 13=1001$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\frac{19!}{10^3} &= 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot\frac{15}{5}\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot\frac{10}{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{4}{2^2}\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
&= (7\cdot 11\cdot 13)\cdot(19\cdot 6)\cdot(18\cdot 8)\cdot(14\cdot 9)\cdot(17\cdot 12)\cdot 2\cdot(16\cdot 3\cdot 3)\\
&= 1001\cdot 114\cdot 144\cdot 126\cdot 204\cdot 2\cdot 144\\
&\equiv 1\cdot(14\cdot 44\cdot 26)\cdot 4\cdot 2\cdot 44\\
&= 2^4\cdot(7\cdot 11\cdot 13)\cdot 2^5\cdot 11\\
&\equiv 2^9\cdot 1\cdot 11\\
&= 512\cdot 11\\
&= 5632 \pmod{100}
\end{aligned}$$

したがって，求める答えは 32 ……… 答

(4)　例えば右の[正答例]のように横線を引けばよい。



〔正答例〕

参考　いわゆる「あみだくじ」の問題である。解答の他にも正答となる横線の引き方は多数存在する。解答の例と横線の位置が異なっても，問題の条件をすべて満たしていれば正解とする。

この問題では横線の本数を10本としたが，９本以下ではこのあみだくじを作ることができない。それは，次のように説明することができる。

（説明）　図１のように，正答例のあみだくじのうち一番上の横線１本だけが存在するあみだくじを考え，このあみだくじの結果を，

【123456】→【123465】　………　①

のように表す。①を見ると，数字の５と６の左右の位置関係が替わっているが，左右の位置関係が替わるのは「５と６」だけで，「５と他の数字」や「6と他の数字」が替わることはない。（例えば，４と６は距離が縮まっているが，左右の位置関係は替わらない。）

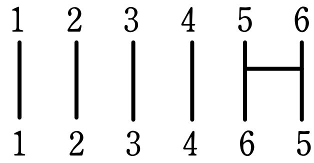


図１

次に，図２のように，正答例のあみだくじの上から２番目までの横線が存在するあみだくじを考え，横線ごとに途中の数字を記入する。そうすると，横線１本ごとにちょうど１組の数字の左右の位置関係が替わることがわかる。この場合は，「５と６」「４と６」だけが替わり，他の数字は替わらないので，【123456】→【123645】となっている。

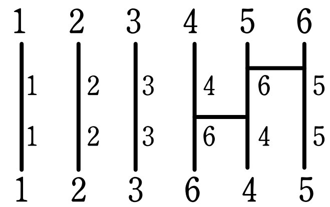


図２

同様にして，正答例のあみだくじの途中の数字を示したのが図３である。確かに，横線１本ごとにちょうど１組の数字の左右の位置関係が替わっていることがわかる。この正答例の場合は，左右の位置関係が替わる数字の組がすべて異なっているが，線の引き方によっては同じ数字の組について左右の位置関係が２回以上替わることが起こり得る。そういった場合を含めると，n を正の整数として一般に次のことが成り立つ。

「左右の位置関係が替わる数字の組が n 組であるあみだくじを作るためには，横線が n 本以上必要である。」………　②

さて，与えられた問題は

【123456】→【634215】

となるあみだくじを作る問題であるが，左右の位置関係が替わった数字の組の個数を求めてみよう。たとえば１に注目すると，１より大きい2，3，4，６がすべて１よりも左側に移動していることがわかる。したがって，数字の左右の位置関係が替わった組は「１と２」，「１と３」，「１と４」，「１と６」の４組である。

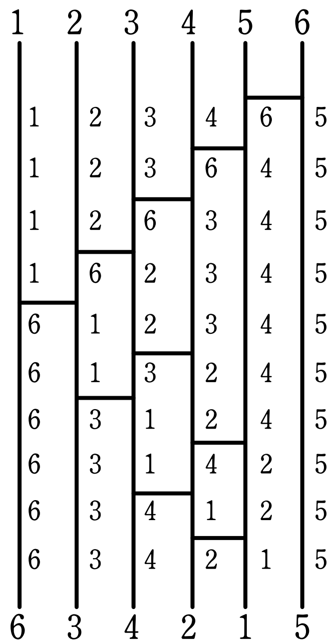


図３

同様に考えると，数字の左右の位置関係が替わった組は全部で

「１と２」，「１と３」，「１と４」，「１と６」，「２と３」，
「２と４」，「２と６」，「３と６」，「４と６」，「５と６」

の10組である。したがって，②から横線は10本以上必要であり，９本以下ではこのあみだくじを作ることはできない。（説明終）

ちなみに，上記の説明から「少なくとも10本必要である」…③　ことがわかり，正答例から「ちょうど10本の答えが存在する」…　④　ことがわかっている。この③と④が同時に成り立つので，「10本が最小本数」であることがわかる。

また，このあみだくじのように数字などを「入れ替える」操作は「置換」とよばれ，大学で学ぶ群論で扱われる対象の一つである。「横線の本数が11以上の奇数（11，13，15，…）の場合は【634215】となるあみだくじを作ることができない」ことも示すことができるので，いつか挑戦してほしい。

$\boxed{2}$ Aさんと Bさんの条件より，$\begin{cases} 2x+5y=360 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 5y+11z=360 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

②から　$11z=5(72-y)$

11 と 5 は互いに素である（最大公約数が 1 である）から，z は 5 の倍数である。

①−②から　$2x=11z$ ……… ③

2 と 11 は互いに素であるから，z は 2 の倍数である。

以上のことから，z は 10 の倍数である。

条件より $0<11z<360$ であるので，これを満たす 10 の倍数 z は，$z=10, 20, 30$

それぞれを③，②に代入して整理すると

$z=10$ のとき，$x=55$，$y=50$

$z=20$ のとき，$x=110$，$y=28$

$z=30$ のとき，$x=165$，$y=6$

ゆえに求める正の整数の組は，$(x, y, z)=(55, 50, 10), (110, 28, 20), (165, 6, 30)$ ……… 答

別解　Aさんの条件より，

$2x+5y=360$　　ゆえに　　$2x=5(72-y)$

2 と 5 は互いに素であるから，

$\begin{cases} x=5k \\ 72-y=2k \end{cases}$ (k は正の整数)　　すなわち　　$\begin{cases} x=5k & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=72-2k & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

Bさんの条件より，

$5y+11z=360$　　ゆえに　　$11z=5(72-y)$

5 と 11 は互いに素であるから，

$\begin{cases} 72-y=11l \\ z=5l \end{cases}$ (l は正の整数)　　ゆえに　　$\begin{cases} y=-11l+72 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ z=5l & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

②，③ より，

$-2k+72=-11l+72$

$2k=11l$

2 と 11 は互いに素であるから，

$\begin{cases} k=11n \\ l=2n \end{cases}$ (n は正の整数)

よって ①，③，④ より，

$\begin{cases} x=55n \\ y=-22n+72 \\ z=10n \end{cases}$ (n は正の整数)

ここで，$y>0$ より $-22n+72>0$ であるから　$n<\dfrac{72}{22}=3.27\cdots$

n は正の整数であるから　$n=1, 2, 3$

したがって，求める正の整数の組は，

$(x, y, z)=(55, 50, 10), (110, 28, 20), (165, 6, 30)$ ……… 答

$\boxed{3}$　図1のように，立方体の1つの頂点と，その頂点を含む3つの辺の中点をすべて結んでできる三角錐を考える。

この三角錐を元の立方体から切り取る操作を，各頂点に対して合計8回行うことで，図2のように問題の立体を得ることができる。

問題の立体は1辺の長さが1であるから，元の立方体の1辺の長さを$\sqrt{2}$とすればよい。このとき，元の立方体の体積は$2\sqrt{2}$である。

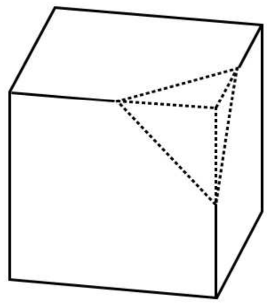


図1

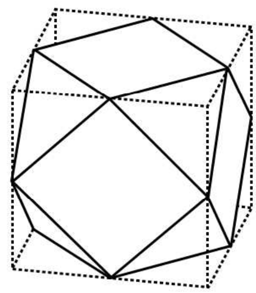


図2

切りとった三角錐は，底面が底辺$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，高さ$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$の直角三角形で，高さが$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$であるから，三角錐の体積は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{48}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

よって求める体積は，

$$2\sqrt{2}-8\times\frac{\sqrt{2}}{24}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

別解

問題の立体は，図3のように1つの直方体と4つの四角錐に分割することができる。

これら4つの四角錐は合同であるから，そのうちの1つについて，図4のように頂点をE，底面の各頂点をA，B，C，Dとする。さらに，頂点Eから底面ABCDに垂線を下ろし，その垂線と底面の交点をH，頂点Eから辺ABに垂線を下ろし，その垂線と辺の交点をIとする。

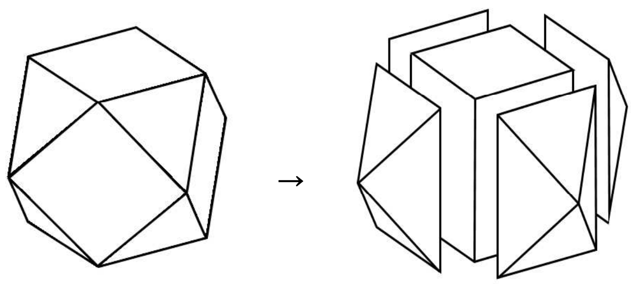


図3

$\triangle$EABは辺ABを斜辺とする直角二等辺三角形であるから，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2},\ \mathrm{EI}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，$\mathrm{HI}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}$であるから，

$$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{EI}^2-\mathrm{HI}^2}=\frac{1}{2}$$

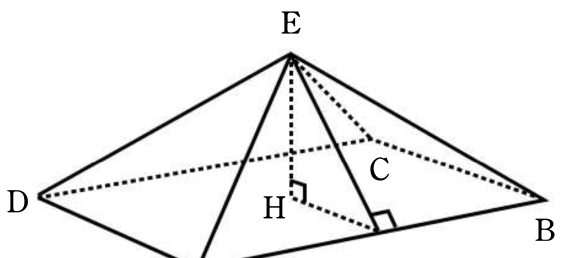


図4

よってこの四角錐の体積は

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{EH}\times\frac{1}{3}=\sqrt{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

さらに直方体は，底面が1辺の長さが1の正方形であり，高さは$\sqrt{2}$であるので，その体積は

$$1\times1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

以上から求める体積は

$$\sqrt{2}+4\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\ \boxed{答}$$

4　玉を並べる場所を図1のように，①～⑨で表す。

隣り合う赤玉の個数に注目し，以下の場合に分けて考える。

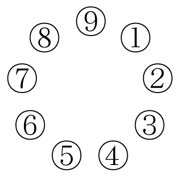


図1

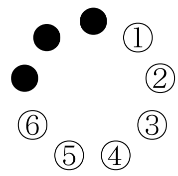


図2

(1) 赤玉3個が隣り合う場合（図2）

赤玉3個を⑦～⑨に固定し，残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから　${}_6C_3=20$ 通り

(2) 赤玉2個が隣り合う場合（図3）

赤玉2個を⑧，⑨に固定し，残りの赤玉1個を②～⑥ のいずれかに置き，残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから

${}_5C_1\times{}_6C_3=100$ 通り

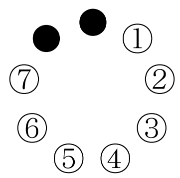


図3

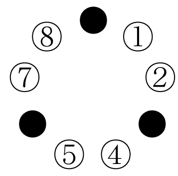


図4

(3) どの赤玉も隣り合わない場合

（i）赤玉と赤玉の間の玉が1個である並びがない場合（図4）

赤玉と赤玉の間に並ぶ玉の個数がすべて2個の場合であるから，赤玉3個を③，⑥，⑨に固定し，残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから，${}_6C_3=20$通り

ただし，20通りのうち，青玉が①，④，⑦または②，⑤，⑧の場合を除いた18通りについては，回転させると同じになる並べ方が3通りずつあるので，　$2+\dfrac{18}{3}=2+6=8$通り

（ii）赤玉と赤玉の間の玉が1個である並びがある場合

赤玉2個を①，⑧に固定し（図5），③～⑥に残りの赤玉1個を置く（図6）。

残りの赤玉1個を置いた場所が③のときと⑥のときは，回転させると赤玉の配列が同じになるので，③のときだけ考えればよい。

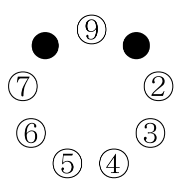


図5

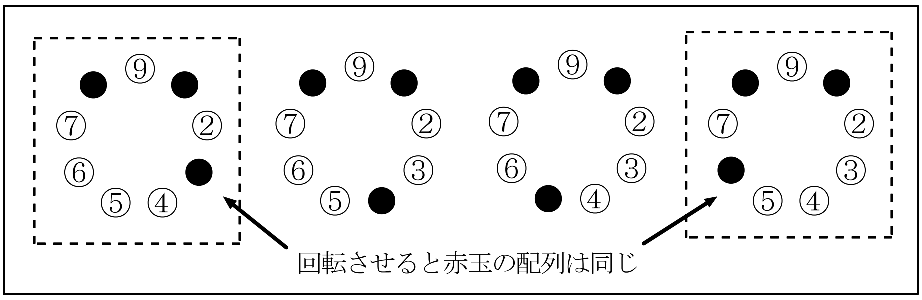


図6

③，④，⑤のいずれの場所に赤玉を置いても，そのそれぞれに対して残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから　$3\times{}_6C_3=3\times20=60$ 通り

以上(1)，(2)，(3)より，求める並べ方は $20+100+8+60=188$ 通り　………　答

別解1　玉を並べる場所を図1のように，①～⑨で表す。

隣り合う赤玉の個数に注目し，以下の場合に分けて考える。

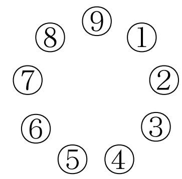


図1

(1) 赤玉3個が隣り合う場合（図2）

赤玉3個を⑦～⑨に固定し，残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから

${}_6C_3=20$ 通り

(2) 赤玉2個が隣り合う場合（図3）

赤玉2個を⑧，⑨に固定し，残りの赤玉1個を②～⑥ のいずれかに置き，残りの場所から青玉3個の位置を選べばよいから

${}_5C_1\times{}_6C_3=100$ 通り

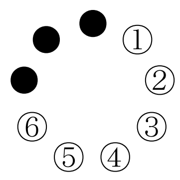


図2

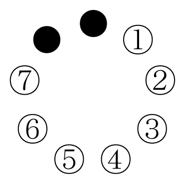


図3

(3) どの赤玉も隣り合わない場合

（ⅰ）120° の回転で重なるように並べるとき（図 4）

赤玉 3 個を③，⑥，⑨に固定し，青玉 3 個を①，④，⑦，または②，⑤，⑧のいずれかに置けばよいから 2 通り

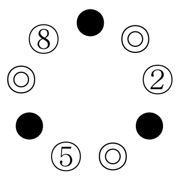


図 4

（ⅱ）120° の回転で重ならないように並べるとき

赤玉 1 個を⑨に固定する。残りの赤玉 2 個を②～⑦の 6 箇所に並べる場合の数を考えると，6 箇所から赤玉 2 個の位置を選ぶ場合の数は ${}_6C_2$ 通りで，このうち，赤玉 2 個が隣り合う場合が 5 通りあるから，求める場合の数は ${}_6C_2-5=10$ 通り。

このとき，他の 6 個の玉を残った場所に並べる場合の数は，青玉 3 個の位置を選べばよいから　${}_6C_3=20$ 通り。

したがって，並べ方の総数は $10\times20=200$ 通り。

この中には（ⅰ）の 2 通りが含まれているので，それを除いて $200-2=198$ 通り。

さらに，この 198 通りには図 5 のように回転させると同じ並び方になるものが 3 通りずつ含まれているので，$\dfrac{198}{3}=66$ 通り。

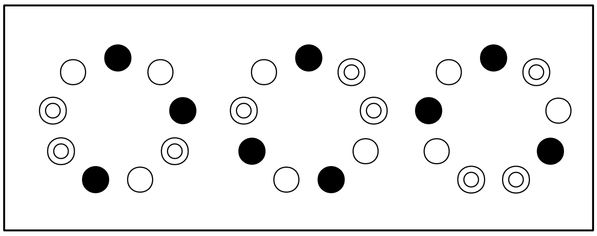


図 5

以上 (1)，(2)，(3) より，求める並べ方は $20+100+2+66=188$ 通り　………　答

別解 2　赤玉 3 個，青玉 3 個，黄玉 3 個を 1 列に並べる場合の数は，全部で $\dfrac{9!}{3!3!3!}=1680$ 通り。それぞれの順列の先頭にある玉から順に①，②，③，………，⑨に置くことで，円順列を作ることを考える。

(1)　赤玉 1 個，青玉 1 個，黄玉 1 個の 3 個の並びが 3 回繰り返す並び方は $3!=6$ 通り。

これらは，図 1 のように 3 個の異なる順列から 1 個の円順列を作るので，できる円順列は $\dfrac{6}{3}=2$ 通り。

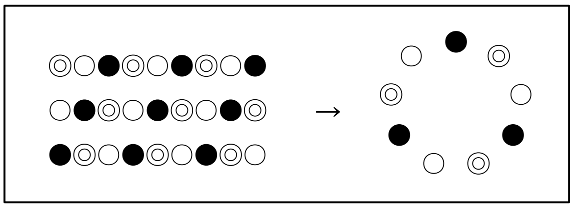


図 1

(2)　(1) 以外の総数は $1680-6=1674$ 通り。

これらは，図 2 のように 9 個の異なる順列から 1 個の円順列を作るので，できる円順列は $\dfrac{1674}{9}=186$ 通り。

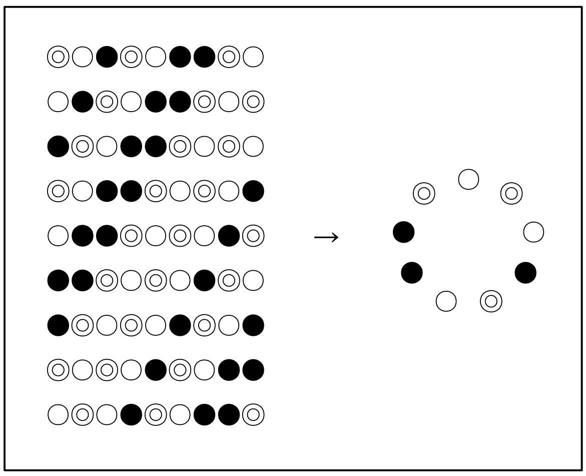


図 2

以上 (1)，(2) より，求める順列の総数は，

$2+186=188$ 通り　………　答

5 ［1］ 原点Oに赤色がついている場合

(1) 原点からの距離が1であるすべての点に青色がついている場合

例えば$(1,0)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$という3点をとると，

この3点には青色がついており，これらを結んでできる三角形は一辺の長さが$\sqrt{3}$の正三角形である。（図1）

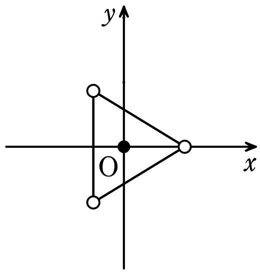


図1

(2) 原点からの距離が1であって赤色がついた点が存在する場合

この点をAとし，Aの座標は$(1,0)$であるとしてよい。$(1,0)$でない場合は，平面上のすべての点を原点を中心に同じ角度だけ回転させることにより，点Aが点$(1,0)$に重なるようにできる。

さらに，$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$とする。

（Ⅰ）BまたはCに赤色がついている場合（図2）

3点O，A，Bまたは3点O，A，Cを考えると，いずれか一方の組には3点ともに赤色がついており，その3点を結んでできる三角形は一辺の長さが1の正三角形である。

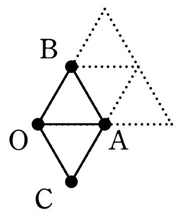


図2

（Ⅱ）B，Cともに青色がついている場合

D$(2,0)$とする。

（ｉ）Dに青色がついている場合（図3）

3点B，C，Dには青色がついており，これらを結んでできる三角形は一辺の長さが$\sqrt{3}$の正三角形である。

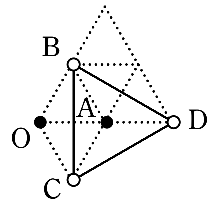


図3

（ⅱ）Dに赤色がついている場合

$E\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F(1,\sqrt{3})$とする。

（ア）Eに赤色がついている場合（図4）

3点A，D，Eには赤色がついており，これらを結んでできる三角形は一辺の長さが1の正三角形である。

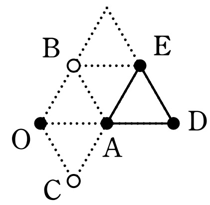


図4

（イ）Eに青色がついている場合

Fに青色がついていれば3点B，E，Fには青色がついており，これらを結んでできる三角形は一辺の長さが1の正三角形である。（図5）

Fに赤色がついていれば3点O，D，Fには赤色がついており，これらを結んでできる三角形は一辺の長さが2の正三角形である。（図6）

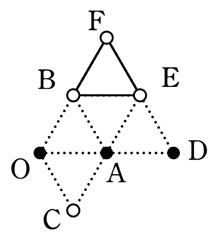


図5

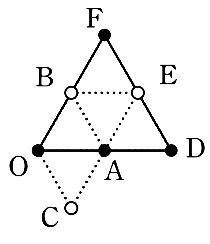


図6

［2］ 原点Oに青色がついている場合

赤色と青色を入れ替えて［1］と同様の議論をすればよい。

以上［1］，［2］より，条件をみたす3点がどのような場合にも存在することがわかった。