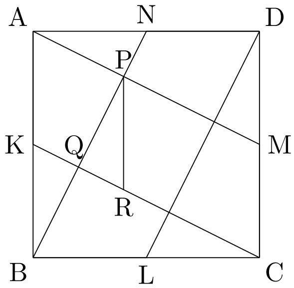
令和元年度　京都・大阪数学コンテスト　略解

$\boxed{1}$ (1)　AM と BN の交点を P, CK と BN の交点を Q とし,



点 P を通り AB に平行な直線と CK の交点を R とする。

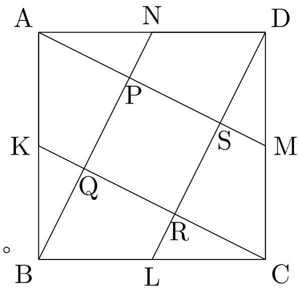
$\triangle$BAN $\backsim$ $\triangle$PQR なので BA : PQ = BN : PR だから,

$1 : \mathrm{PQ} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} : \dfrac{1}{2}$ よって $\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

　求める面積は　$\mathrm{PQ}^2 = \dfrac{1}{5}$

（別解）

　AM と BN, CK と BN, CK と DL, AM と DL の交点をそれぞれ P, Q, R, S とする。



　中点連結定理により AP = PS , 2 PN = DS だから

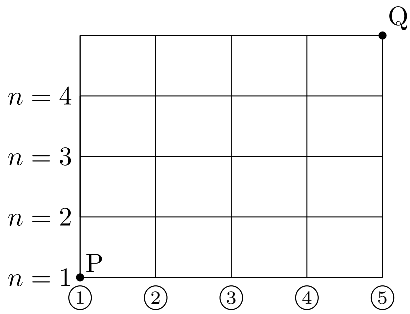
$\triangle$APN を 180° 回転させて AN と DN を重ね合わせてできる四角形は, 正方形 PQRS と合同である。

　同様に考えると, 正方形 PQRS と合同な正方形が他にも 3 個できるから, 求める面積は元の正方形の $\dfrac{1}{5}$ になる。

(2)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ について,

南から n 本目の道から $n+1$ 本目の道に移動する際に, どこで（ ① ～ ⑤ ）北向きに移動するかを決めれば道順が決まる。

　したがって　$5^4 = 625$　通り



(3)　△ABC と △AB′C は, 斜辺と他の一辺の長さが等しいことから

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{AB'C}$$

とわかる。ゆえに, $\angle \mathrm{BAC} = 30^\circ$ となり, 右の図形の面積は, 2 つの正方形の面積から共通部分の面積を除けばよいので

$$2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

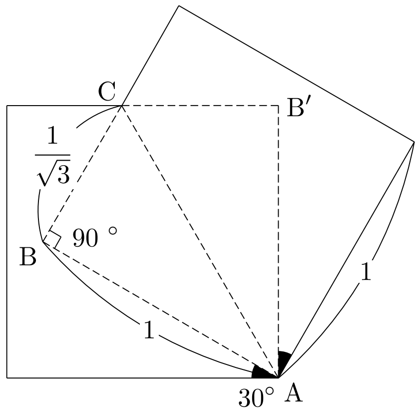
また, 右の図形の周囲の長さは,

$\mathrm{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より,

$$4 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

以上より, 求める立体の表面積は

$$2\cdot\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\cdot 1\cdot\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 10 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



（別解）

求める表面積は図 1 の立体を 2 つ組み合わせた図 2 の立体の表面積なので,

$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) = 10 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

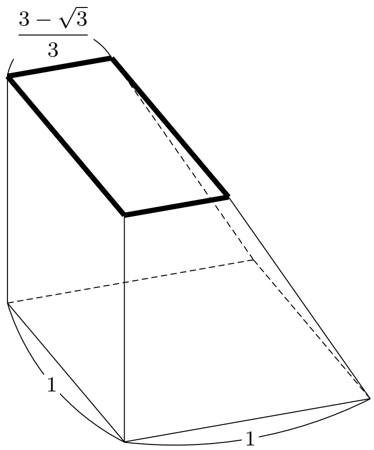


図 1

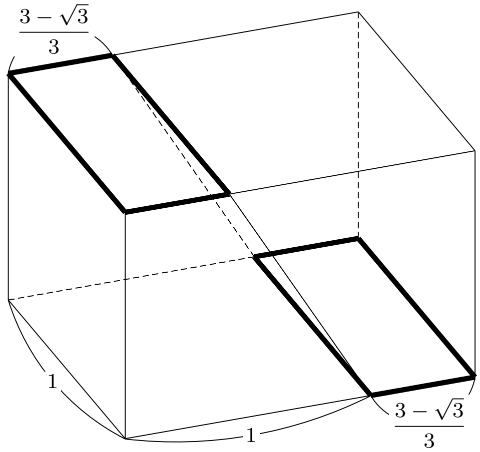


図 2

(4)　番号 n （n は自然数）が書かれたロッカーの扉が「操作」されるのは, 生徒の出席番号が, n の約数のときである。

よって, 指示に従って 40 人の生徒が「操作」を終了したとき, ロッカーの扉が開いているのは, ロッカーに書かれた番号 n の約数の個数が, 奇数のときである。

n が k 個の素数 n_1 , $\cdots$, n_k （ただし k は自然数）によって

$$n = n_1^{m_1}\, n_2^{m_2}\, n_3^{m_3}\, \cdots\, n_k^{m_k} \quad \text{（ただし } m_1\text{ , } \cdots \text{ , } m_k \text{ は自然数）}$$

と素因数分解できたとき, n の約数の個数は $(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_k+1)$ であり, これが奇数であるのは m_1 , $\cdots$, m_k がすべて偶数のときであるが, これは n が平方数になるときである。

24 番と 36 番のロッカーの扉だけが, 1 回だけ「操作」ミスがあったことがわかる。

したがって, 指示の内容を間違えたのは, 出席番号 12 番の生徒である。

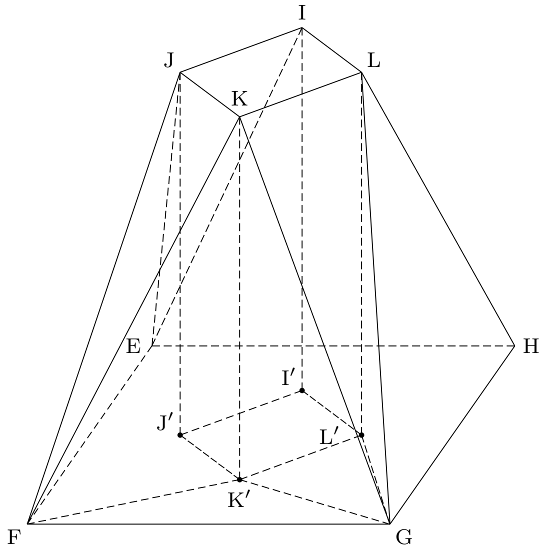
$\boxed{2}$　正方形 EFGH の各頂点と, 正方形 IJKL の各頂点を結んだときに現れる立体の体積を求めればよい。

点 I, J, K, L から正方形 EFGH に垂線を下ろし, その交点を I′, J′, K′, L′ とする。

この立体の体積は,

（直方体 IJKL-I′J′K′L′）+ 4 ×（三角錐 K-K′FG）+ 4 ×（四角錐 G-KLL′K′）

$$= 8 + 4 \times \frac{8}{3} + 4 \times 4 = \frac{104}{3}$$



$\boxed{3}$　どの問題についても 888 人以上の生徒が正解しているので, 全員の正解数は 4440 問以上である。もし 2019 人のすべての生徒が 3 問以上正解できなかった場合, 全員の正解数は $2019 \times 2 = 4038$ 問以下となり, 正解数が 4440 問以上であることに矛盾。ゆえに, 3 問以上正解した生徒が存在することがわかる。

この 3 問以上正解した生徒の中から, 生徒 A を選び, A が正解した問題のうち 3 問を Q_1, Q_2, Q_3 とする。また, 残りの 2 問 Q_4, Q_5 に対して, それぞれ 888 人以上の生徒が正解しているので, Q_4 を正解している A と異なる生徒を B, Q_5 を正解している A とも B とも異なる生徒を C とすると, 3 人組 $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ は条件を満たす。

$\boxed{4}$ $\angle\mathrm{ADH}+\angle\mathrm{AEH}=180^\circ$ なので 4 点 A, D, H, E は同一円周上にある。

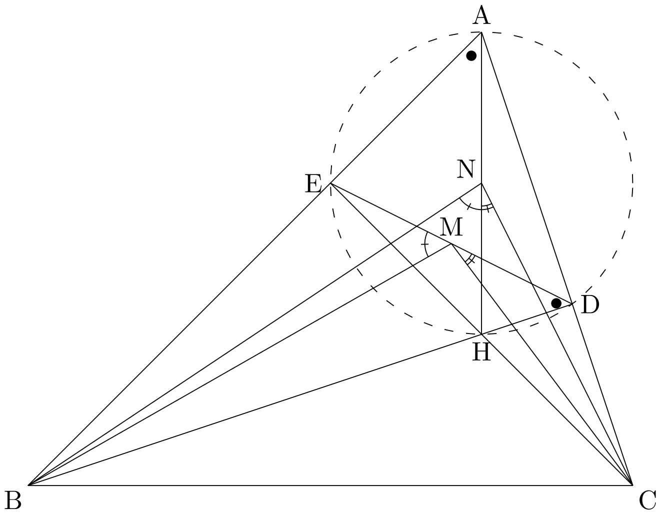
よって, $\angle\mathrm{BDE}=\angle\mathrm{BAH}$ なので $\triangle\mathrm{DBE} \backsim \triangle\mathrm{ABH}$

これらの相似な三角形において点 M と点 N が対応するので $\angle\mathrm{BNH}=\angle\mathrm{BME}$

同様にして $\angle\mathrm{CNH}=\angle\mathrm{CMD}$ がわかる。

このとき

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BMC}+\angle\mathrm{BNC} &= \angle\mathrm{BMC}+\angle\mathrm{BNH}+\angle\mathrm{CNH}\\ &= \angle\mathrm{BMC}+\angle\mathrm{BME}+\angle\mathrm{CMD}\\ &= 180^\circ\end{aligned}$$



$\boxed{5}$

[1] a, b, c, d がすべて等しくなる, あるいは 3 つの値が等しくなるとき, 対称性から $a = b = c$ の場合の解を並び替えることで他の場合の解が得られる。この場合, $ab + cd, ac + bd, ad + bc$ はすべて $a^2 + ad = a(a + d)$ であり, これが 2 の累乗となることが条件である。a は奇数であることから $a = 1$ となり, さらに $a + d$ も 2 の累乗であることから $d = 2^m - 1$(m は正の整数) となる。よって, 条件を満たすものは $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 2^m - 1)$, およびこれを並び替えたものに限る。

[2] a, b, c, d のうち [1] の場合でなく, さらに少なくとも a, b, c, d のうち値が等しくなる組が 1 組は存在するとき, 対称性から $a = b$ の場合の解を並び替えることで他の場合の解が得られる。このとき $ac + bd = ad + bc = a(c + d)$, $ab + cd = a^2 + cd$ がそれぞれ 2 の累乗となる。また, $a(c + d)$ が 2 の累乗であることと a が奇数であることから $a = 1$ がわかり, あとは

$$1 + cd = 2^x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$
$$c + d = 2^y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となる正の整数の組 (c, d, x, y) で c, d が 1 でない奇数となる組を求めればよい。このとき,

$$\text{①} - \text{②}: \qquad (c - 1)(d - 1) = 2^x - 2^y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$
$$\text{①} + \text{②}: \qquad (c + 1)(d + 1) = 2^x + 2^y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

となり, $(c - 1)(d - 1) > 0$ より $x > y$ がわかる。また c, d が奇数であることから c, d はともに 3 以上となるので $2^y = c + d \geqq 6$ となって $y \geqq 3$ がわかる。さらに ③ から $(c - 1)(d - 1)$ は 2^y の倍数であるから 8 の倍数となるので $c - 1, d - 1$ の少なくとも一方は 4 の倍数となる。ここで式①, ②の対称性から $d - 1$ が 4 の倍数の場合を考えればよい。このとき $d + 1$ は 4 の倍数でない偶数であり, 式④の 2 で割り切れる回数に着目すると $c + 1$ は 2^{y-1} の倍数であることがわかる。これから $c - 1$ は 4 の倍数でない偶数となって, 式③の 2 で割り切れる回数から $d - 1$ は 2^{y-1} の倍数であることもわかる。以上より, $c = k \cdot 2^{y-1} - 1, d = l \cdot 2^{y-1} + 1$ (k, l は正の整数) とおける。これらを式②に代入すると $(k + l) \cdot 2^{y-1} = 2^y$ となり, $k + l = 2$ がわかる。よって $(k, l) = (1, 1)$ であり, これを式①に代入すると $2^{2y-2} = 2^x$ となって $x = 2y - 2$ がわかる。 よって $(c, d, x, y) = (2^m - 1, 2^m + 1, 2m, m + 1)$ (ただし m は 2 以上の整数) は式①, ②を満たすので, 以上より条件を満たすものは $(a, b, c, d) = (1, 1, 2^m - 1, 2^m + 1)$ (m は 2 以上の整数) , およびこれを並び替えたものに限る。

[3] a, b, c, d の値がすべて異なるとき, 条件を満たす (a, b, c, d) が存在しないことを示す。対称性から $a < b < c < d$ の場合を考えればよい。条件から, 正の整数 x, y により

$$ab + cd = 2^x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$
$$ac + bd = 2^y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

となる。このとき $a < b < c < d$ でこれらは奇数より $c \geqq 5$, $a \geqq 1$ なので $2^y = ac + bd \geqq 5 > 4$ となって $y \geqq 3$ がわかる。また式⑤, ⑥より

$$\text{⑤} - \text{⑥}: \qquad (d - a)(c - b) = 2^x - 2^y$$
$$\text{⑤} + \text{⑥}: \qquad (d + a)(c + b) = 2^x + 2^y$$

が成立する。ここで [2] の議論と同様の作業で $d-a$ か $c-b$ の一方が 2^{y-1} の倍数となるが, $d-a$ が 2^{y-1} の倍数なら $d-a \geqq 2^{y-1}$ であるから $d > 2^{y-1}$ となり, $c-b$ が 2^{y-1} の倍数なら $c-b \geqq 2^{y-1}$ であるから $d > c > 2^{y-1}$ となる。ゆえに $d > 2^{y-1}$ である。また, $b > a \geqq 1$ と b が奇数であることから $b \geqq 3$ であり, 式⑥から $2^y = ac + bd > 3 \cdot 2^{y-1} > 2 \cdot 2^{y-1} = 2^y$ となり矛盾。よってこのとき条件を満たすものは存在しない。

[1], [2], [3] より, $1 = 2^1 - 1,\ 3 = 2^1 + 1 = 2^2 - 1$ に注意すると条件を満たす (a, b, c, d) は正の整数 m を用いて $(1, 1, 1, 2^m - 1), (1, 1, 2^m - 1, 2^m + 1)$ と表せる組, およびこれらを並び替えたものに限る。

（別解）

対称性から $a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合を考えて並び替えればよい。まず仮定から正の整数 x, y で

$$ab+cd=2^x \quad \cdots\cdots ①$$
$$ac+bd=2^y \quad \cdots\cdots ②$$

となるものが存在するが, このとき以下が成立する。

$$①-② : \quad (d-a)(c-b)=2^x-2^y \quad \cdots\cdots ③$$
$$①+② : \quad (d+a)(c+b)=2^x+2^y \quad \cdots\cdots ④$$

[1] $b=c$ のとき, ②より $b(a+d)=2^y$ となるのでこれと b が奇数から $b=1$ が成立する。また a は正の奇数で $a \leqq b=1$ から $a=1$ も従い, このとき②は $1+d=2^y$ となるので $d=2^y-1$。よって a, b, c, d は正の整数 m を用いて $(a, b, c, d)=(1,1,1,2^m-1)$ と表せることが必要で, 逆にこのとき条件を満たす。

[2] $b<c$ のとき, $c>b \geqq 1$ より $c \geqq 3$ かつ $d \geqq 3$ に注意すると②は $2^y \geqq 6$ となるので $y \geqq 3$ が成立する。ここで $c-b$ が 4 の倍数と仮定すると b が奇数から $b+c$ は 4 の倍数でない偶数となるが,④の 2 で割り切れる回数に着目すると $d+a$ は 2^{y-1} の倍数である。ここで $y \geqq 3$ から $d+a$ は 4 の倍数で a が奇数から $d-a$ は 4 の倍数でない偶数となり, これより③の 2 で割り切れる回数に着目すると $c-b$ は 2^{y-1} の倍数である。ここで $c-b>0$ から $c-b \geqq 2^{y-1}$ が成立して $c>2^{y-1}$ が成立するが, このとき②は $2^y \geqq c+d \geqq 2c>2 \cdot 2^{y-1}=2^y$ となるので矛盾。よって $c-b$ は b, c が奇数だったことに注意すると 4 の倍数でない偶数となる。このとき③の 2 で割り切れる回数から $d-a$ は 2^{y-1} の倍数となる。よって $d=a+k \cdot 2^{y-1}$ (k は正の整数) とおける。ここで②において $2^y=ac+bd>bd>bk \cdot 2^{y-1}$ から $bk<2$ より $b=k=1$ が成立し, またこのとき $a=1$ も成立する。よってこれらから $d=2^{y-1}+1$ となりこれらを②に代入すると $c=2^y-2^{y-1}-1=2^{y-1}-1$ となる。よって $b<c$ のときは $y \geqq 3$ だったことに気をつけると 2 以上の整数 m を用いて $(a, b, c, d)=(1,1,2^m-1,2^m+1)$ と表せることが必要で, 逆にこの (a, b, c, d) は条件を満たす。

[1],[2] と $1=2^1-1,\ 3=2^1+1=2^2-1$ に注意すると, 条件を満たす (a, b, c, d) は正の整数 m を用いて $(1,1,1,2^m-1),(1,1,2^m-1,2^m+1)$ と表せる組, およびこれらを並び替えたものに限る。